

高中数学竞赛专题讲座

丛书策划 李胜宏
丛书主编 陶平生 苏建一
刘康宁 边红平

FUSHU YU DUOXIANGSHI

复数与多项式

本书主编 李爱国



浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座.复数与多项式/陶平生等主编.—杭州:浙江大学出版社,2007.6
ISBN 978-7-308-05379-2

Ⅰ.高… Ⅱ.陶… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第082230号

高中数学竞赛专题讲座(复数与多项式)

本书主编 岑爱国

责任编辑 沈国明
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路148号 邮政编码310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 富阳市育才印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 10
字　　数 190千
版 印 次 2007年6月第1版 2007年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-05379-2
定　　价 13.00元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

丛书编委会

编写说明

影响最大、级别最高的中学生"国际数学奥林匹克"(简称IMO)由来已久。自第1届IMO于1959年在罗马尼亚举行以来,有近60年的历史,其影响越来越广泛。在国际数学奥林匹克的推动下,世界各地的数学竞赛活动如火如荼。目前,我国数学竞赛逐步形成了从全国联合竞赛、全国中学生数学冬令营到国家集训队一个完整的竞赛选拔体系。

数学竞赛作为一项智力活动,吸引了无数数学爱好者积极参与,也为那些对数学有浓厚兴趣和有数学天赋的学生提供了一个展示自我的平台,是发现和培养数学人才的一条有效渠道。我们欣喜地看到,通过这项活动,发现了一批数学苗子,培养了一批数学人才,许多参与竞赛的优秀选手后来都成了杰出的数学家。

总体看来,我国的数学竞赛体制日趋完善,它的一些功能和作用也日益凸显。随着高校招生制度的改革,各种学科竞赛,尤其是数学竞赛的选拔功能越来越被广大高校所认可。事实上,学科竞赛已经成为高校自主招生和选拔人才的重要途径之一。

我们本着为数学竞赛的普及、提高做点有益事情的愿望,在全国范围内组织一批长期从事数学竞赛且做出杰出成绩的一线专家编写了一套"高中数学竞赛专题讲座丛书"。丛书包括《初等数论》、《函数与函数方程》、《复数与多项式》、《不等式》、《组合问题》、《排列组合与概率》、《数列与归纳法》、《集合与简易逻辑》、《三角函数》、《立体几何》、《平面几何》、《解析几何》和《数学结构思想及解题方法》13种。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,



传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有一定的指导作用和参考价值。

丛书由浙江大学数学系教授、博士生导师、全国数学奥林匹克竞赛领队李胜宏策划；丛书由陶平生、苏建一、刘康宁、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、苏建一、刘康宁、边红平、黄军华、王建中、岑爱国、韦吉珠、张雷、王俊明、李世杰、沈虎跃、斯理炯、虞金龙、马洪炎。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。





目　录







第一讲 复数的概念与运算

知识点金

1. 复数的概念

复数有四种表示形式：

代数形式：$z=a+bi$，$a,b\in\mathbf{R}$；

几何形式：复数 $z=a+bi\ (a,b\in\mathbf{R})$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$ 或由原点发出的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应；

三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r\geqslant 0$，$\theta\in\mathbf{R}$；

指数形式：$z=re^{i\theta}$，$r\geqslant 0$，$\theta\in\mathbf{R}$.

其中，$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，角 θ 为复数 z 的辐角. 这就是著名的欧拉(Euler)公式.

通过这四种形式来表达复数，使复数的概念更加清晰、直观、形象、深刻. 这四种形式所蕴含的实际意义，沟通了代数、三角、几何等学科间的联系. 由它们所建立起来的复数的运算法则，都具有各自的特点，通过它们之间的彼此转化，我们能灵活地分析问题和解决问题.

2. 复数的运算法则

加、减法：$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$；

乘法：$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$，

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]；$$

除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ (c+di\neq 0)$，

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]；$$

乘方：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\ (n\in\mathbf{N}^*)$；



开方：复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 n 次方根是 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$，$k=0$，$1$，…，$n-1$.

3. 复数的模与共轭复数

共轭复数的性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

(3) $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}(z)=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$；

(4) z 是实数的充要条件是 $\bar{z}=z$，z 是纯虚数的充要条件是 $\bar{z}=-z$ 且 $z\neq 0$；

(5) $z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$.

复数的模的性质：

(1) $\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$；

(2) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq 0)$；

(3) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，当 z_1 或 z_2 中有一个为零时，上述不等式等号成立；当 $z_1z_2\neq 0$ 时，当且仅当 $|\arg z_1-\arg z_2|=\pi$ 时，左边取等号；当且仅当 $\arg z_1=\arg z_2$ 时，右边取等号.

类似地，还有 $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.
这两个不等式称为三角不等式.

4. 两个复数相等的充要条件是它们的实部、虚部对应相等，或者它们的模与辐角主值对应相等(非零复数). 利用复数相等的充要条件，可以把复数问题转化为实数问题，从而获得解决问题的一种途径.

复数的模也是将复数问题实数化的有效方法之一. 善于利用模的性质，是模运算中的一个突出方面.



例题精析

例 1 设复数 α、β 满足 $|\alpha|=|\beta|=1$，$\alpha+\beta+1=0$. 求证：α、β 都是 1 的立方根.

分析 复数表示形式的多样化为我们求解复数问题提供了多角度的思维方式.

证法 1 运用代数形式. 设 $\alpha=a+b\mathrm{i}$，$\beta=c+d\mathrm{i}$，a、b、c、$d\in\mathbf{R}$，则由 $|\alpha|=|\beta|=1$ 得 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$. ①



再由 $\alpha+\beta=-1$，根据复数相等的充要条件得 $a+c=-1$，$b+d=0$. ②

将上述①，②中四式联立，解得 $a=c=-\frac{1}{2}$，$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，$d=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 故 $\alpha^3=\beta^3=1$.

证法 2 运用三角形式. 由 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设 $\alpha=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，$\beta=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ $(\theta,\varphi\in\mathbf{R})$. 再由 $\alpha+\beta=-1$，得 $\begin{cases}\cos\theta+\cos\varphi=-1\\ \sin\theta+\sin\varphi=0\end{cases}$.

由此求得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\cos\varphi=-\frac{1}{2}$，$\sin\varphi=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

证法 3 考虑几何意义. 由 $\alpha+\beta=-1$ 及 $|\alpha|=|\beta|=1$，可设 $\overrightarrow{OA}=\alpha$，$\overrightarrow{OB}=\beta$，$\overrightarrow{OC}=-1$. 如图 1-1. 根据复数加法的几何意义，可知四边形 $OACB$ 是平行四边形，且各边相等. 从而 $\angle xOA=120^\circ$，$\angle xOB=120^\circ$. 因此 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\beta=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

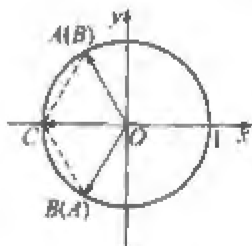


图 1-1

证法 4 运用共轭复数的运算技巧. 由 $\alpha+\beta=-1$，知 $|\alpha+\beta|^2=1$，即 $(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})=1$. 展开上式，并利用 $\alpha\bar{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\bar{\beta}=|\beta|^2=1$ 进行化简，得 $\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta+1=0$. 将 $\beta=-\alpha-1$，$\bar{\beta}=-\bar{\alpha}-1$ 代入上式并化简，得 $\alpha+\bar{\alpha}+1=0$. 将上式两边同乘以 α，得 $\alpha^2+\alpha+1=0$. 所以 $\alpha^3=1$. 同理 $\beta^3=1$.

评注 本例中采用的 4 种证明方法是处理复数问题的基本方法和技巧.

例 2 求证：$[(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{3}\mathrm{i}]^3=[(2b-c-a)+(c-a)\sqrt{3}\mathrm{i}]^3$.

分析 如果将等式的两边展开，则运算太繁. 可以考虑用 1 的三次单位虚根 w 来简化运算.

证明 左边 $=[2a+b(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})+c(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})]^3=(2a+2bw+2cw^2)^3$，

其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$w^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\text{右边}&=[a(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})+2b+c(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})]^3=(2aw^2+2b+2cw)^3\\&=[(2a+2bw+2cw^2)w^2]^3=(2a+2bw+2cw^2)^3=\text{左边}.\end{aligned}$$

故等式成立.

例 3 给定实数 a，b，c. 已知复数 z_1，z_2，z_3 满足 $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 & ①\\ \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1 & ②\end{cases}$,

求 $|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值.

分析1 由①得 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{z_2}{z_3}\right|=\left|\frac{z_3}{z_1}\right|=1$，利用复数的三角形式或指数形式，可设 $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\alpha}$，$\frac{z_2}{z_3}=e^{i\beta}$，则 $\frac{z_3}{z_1}=e^{-i(\alpha+\beta)}$，代入②，并利用复数相等的充要条件求解.

解法1 由条件①可设 $\frac{z_1}{z_2}=e^{i\alpha}$，$\frac{z_2}{z_3}=e^{i\beta}$，则 $\frac{z_3}{z_1}=e^{-i(\alpha+\beta)}$ 代入条件②，有 $e^{i\alpha}+e^{i\beta}+e^{-i(\alpha+\beta)}=1$.

由欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，对上式两边取虚部，得

$$0=\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

所以 $\alpha=2k\pi$ 或 $\beta=2k\pi$ 或 $\alpha+\beta=2k\pi$，从而 $z_1=z_2$ 或 $z_2=z_3$ 或 $z_3=z_1$.

若 $z_1=z_2$，代入条件②，即 $1+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$，故 $\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^2=-1$，$z_1=\pm iz_3$.

这时 $|az_1+bz_2+cz_3|=|z_1|\cdot|a+b\pm ci|=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

类似地，若 $z_2=z_3$，则 $|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(b+c)^2+a^2}$；若 $z_3=z_1$，则 $|az_1+bz_2+cz_3|=\sqrt{(c+a)^2+b^2}$. 因此，$|az_1+bz_2+cz_3|$ 的值为 $\sqrt{(a+b)^2+c^2}$ 或 $\sqrt{(b+c)^2+a^2}$ 或 $\sqrt{(c+a)^2+b^2}$.

分析2 由条件①及共轭复数的性质可得 $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$，$\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$，$\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$，再利用代数恒等变形(因式分解)求解.

解法2 由 $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_3}{z_1}=1$ 得 $z_1^2z_3+z_2^2z_1+z_3^2z_2=z_1z_2z_3$　　③

$$及\ \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}}+\frac{\overline{z_3}}{\overline{z_1}}=1\quad ④$$

由于 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，所以 $\overline{z_1}=\frac{1}{z_1}$，$\overline{z_2}=\frac{1}{z_2}$，$\overline{z_3}=\frac{1}{z_3}$.

于是①式可化为 $\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_3}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}=1$.

即 $z_2^2z_3+z_3^2z_1+z_1^2z_2=z_1z_2z_3$　　⑤

由③、⑤，得 $z_1^2z_3+z_2^2z_1+z_3^2z_2=z_2^2z_3+z_3^2z_1+z_1^2z_2$，

即 $(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)=0$，所以 $z_1=z_2$ 或 $z_2=z_3$ 或 $z_3=z_1$.

以下同解法1.



例 4 方程 $x^{10}+(13x-1)^{10}=0$ 的 10 个复数根分别为 $r_1, \overline{r_1}, r_2, \overline{r_2}, r_3, \overline{r_3}, r_4, \overline{r_4}, r_5, \overline{r_5}$. 求代数式 $\frac{1}{r_1\overline{r_1}}+\frac{1}{r_2\overline{r_2}}+\cdots+\frac{1}{r_5\overline{r_5}}$ 的值.

分析 注意到 $x\neq 0$，于是原方程可化为 $\left(13-\frac{1}{x}\right)^{10}=-1$. 令 $y=13-\frac{1}{x}$，将问题转化为研究方程 $y^{10}=-1$ 的复数根.

解 显然 $x\neq 0$，于是原方程可化为 $\left(13-\frac{1}{x}\right)^{10}=-1$. 令 $y=13-\frac{1}{x}$，则有 $y^{10}=-1$. 设方程 $y^{10}=-1$ 的 10 个复数根分别为 $\varepsilon_k, \overline{\varepsilon_k}(k=1,2,3,4,5)$，其中 $\varepsilon_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{10}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{10}$, $k=1,2,3,4,5$. 不妨设 $13-\frac{1}{r_k}=\varepsilon_k$，则 $\frac{1}{r_k}=13-\varepsilon_k$, $k=1,2,3,4,5$. 于是，有 $\sum_k\frac{1}{r_k\overline{r_k}}=\sum_k(13-\varepsilon_k)(13-\overline{\varepsilon_k})=\sum_k[170-13(\varepsilon_k+\overline{\varepsilon_k})]$

$$=850-26\left(\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{5\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}\right)=850.$$

即所求代数式的值为 850.

例 5 若 z 是复数，$|z|=1$ 且 $u=z^4-z^3-3z^2i-z+1$. 求 $|u|$ 的最值，并求取得最值时的复数 z.

分析 u 的次数较高，使得进一步运算成为障碍. 由 $|z|=1$，得 $\frac{1}{z}=\overline{z}$，再结合复数的模的性质，有 $|u|=\left|z^2\left(z^2-z-3i-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\right|=|(z^2+\overline{z}^2)-(z+\overline{z})-3i|$，这为进一步的运算提供了可能.

解 由 $|z|=1$，得 $\overline{z}=\frac{1}{z}$，所以 $|u|=\left|z^2\left(z^2-z-3i-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\right|=|(z^2+\overline{z}^2)-(z+\overline{z})-3i|$.

设 $z=x+yi$, $x,y\in\mathbf{R}$，则 $x^2+y^2=1$，且 $z^2=x^2-y^2+2xyi=(2x^2-1)+2xyi$，于是 $|u|=|2(2x^2-1)-2x-3i|=|(4x^2-2x-2)-3i|$.

记 $t=4x^2-2x-2$. 由 $x\in[-1,1]$，易知 $t\in\left[-\frac{9}{4},4\right]$，且 $|u|=|t-3i|=\sqrt{t^2+9}$.

故当 $t=0$ 即 $z=1$ 或 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 时，$|u|_{\min}=3$；当 $t=4$ 即 $z=-1$ 时，$|u|_{\max}=5$.

例 6 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为复数，满足 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$. 求证：上述 n 个复数中，必存在若干复数，它们的和的模不小于 $\frac{1}{6}$.

分析 问题求解的关键是按某一标准对上述复数分类求和.

证明 设 $z_k = a_k + ib_k$, $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $k=1,2,\cdots,n$.

由复数的模的性质,得 $|z_k| \leqslant |a_k| + |b_k|$, $k=1,2,\cdots,n$.

从而 $$1=\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \quad ①$$

又 $$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2} \geqslant \max\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|, \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|\right\} \quad ②$$

比较①,②,为了便于沟通,可将①式右边改写为

$$\sum_{a_k\geqslant0}|a_k| + \sum_{a_k<0}|a_k| + \sum_{b_k\geqslant0}|b_k| + \sum_{b_k<0}|b_k| = \left|\sum_{a_k\geqslant0}a_k\right| + \left|\sum_{a_k<0}a_k\right| + \left|\sum_{b_k\geqslant0}b_k\right| + \left|\sum_{b_k<0}b_k\right|$$

于是,上述四项中必有一项不小于$\frac{1}{4}$,不妨设 $\left|\sum_{a_k\geqslant0}a_k\right| \geqslant \frac{1}{4}$

从而 $$\left|\sum_{a_k\geqslant0} z_k\right| \geqslant \left|\sum_{a_k\geqslant0}a_k\right| \geqslant \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$$

评注 以下我们从另一角度出发思考问题. 用直线 $y=x$ 及 $y=-x$ 将复平面分成四个区域,由于 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1$,所以在上述四个区域中,至少有一个区域中的所有复数的模的和不小于$\frac{1}{4}$. 为了简化问题,不妨设此区域为包含 x 轴正方向的区域(由于是取模,若不是此区域可进行旋转).

我们设这些复数为 z_{i_t},且 $z_{i_t}=a_{i_t}+ib_{i_t}$, $t=1,2,\cdots,m(1\leqslant m\leqslant n, m\in \mathbf{N}^*)$,则 $a_{i_t}>0$,且 $\sum_{t=1}^{m} |z_{i_t}| \geqslant \frac{1}{4}$. 于是

$$\left|\sum_{t=1}^{m} z_{i_t}\right| = \sqrt{\left(\sum_{t=1}^{m} a_{i_t}\right)^2+\left(\sum_{t=1}^{m} b_{i_t}\right)^2} \geqslant \left|\sum_{t=1}^{m} a_{i_t}\right| = \sum_{t=1}^{m} |a_{i_t}| \geqslant \frac{1}{\sqrt2}\sum_{t=1}^{m}\sqrt{a_{i_t}^2+b_{i_t}^2} =$$

$\frac{1}{\sqrt2}\sum_{t=1}^{m}|z_{i_t}| \geqslant \frac{1}{4\sqrt2} > \frac{1}{6}$. 从而使问题彻底解决.

例7 任给 8 个非零实数 $a_1,a_2,\cdots,a_8$. 求证:下面六个数 $a_1a_3+a_2a_4$, $a_1a_5+a_2a_6$, $a_1a_7+a_2a_8$, $a_3a_5+a_4a_6$, $a_3a_7+a_4a_8$, $a_5a_7+a_6a_8$ 中,至少有一个是非负的.

分析 所给的六个数中,a_1,a_2; a_3,a_4; a_5,a_6; a_7,a_8 成对出现,可把它们构造成四个复数 $z_1=a_1+a_2i$, $z_2=a_3+a_4i$, $z_3=a_5+a_6i$, $z_4=a_7+a_8i$,每两个复数差的模中有对应的六个数的形式出现.

证明 设 $z_1=a_1+a_2i$, $z_2=a_3+a_4i$, $z_3=a_5+a_6i$, $z_4=a_7+a_8i$,则

$$|z_1-z_2|^2=(a_1-a_3)^2+(a_2-a_4)^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-2(a_1a_3+a_2a_4),$$

于是 $$|z_1|^2+|z_2|^2-|z_1-z_2|^2=2(a_1a_3+a_2a_4)$$

同理，有 $|z_1|^2+|z_3|^2-|z_1-z_3|^2=2(a_1a_5+a_2a_6)$，

$$|z_1|^2+|z_4|^2-|z_1-z_4|^2=2(a_1a_7+a_2a_8),$$
$$|z_2|^2+|z_3|^2-|z_2-z_3|^2=2(a_3a_5+a_4a_6),$$
$$|z_2|^2+|z_4|^2-|z_2-z_4|^2=2(a_3a_7+a_4a_8),$$
$$|z_3|^2+|z_4|^2-|z_3-z_4|^2=2(a_5a_7+a_6a_8).$$

余下的只需证明复数 z_1，z_2，z_3，z_4 所对应的四个向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_3}$，$\overrightarrow{OZ_4}$ 中至少有两个向量之间的夹角小于或等于 $\frac{\pi}{2}$，而这是显然成立的，故原命题得证．

例 8　已知实数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的各项均不为 0，且 $a_n=a_{n-1}\cos\theta-b_{n-1}\sin\theta$，$b_n=a_{n-1}\sin\theta+b_{n-1}\cos\theta$，且 $a_1=1$，$b_1=\tan\theta$，θ 为已知数．求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式．

分析　构造复数 $z_n=a_n+b_n\mathrm{i}(n\in\mathbf{N}^*)$ 求解．

解　构造复数 $z_n=a_n+b_n\mathrm{i}(n\in\mathbf{N}^*)$，则

$$\frac{z_n}{z_{n-1}}=\frac{(a_{n-1}\cos\theta-b_{n-1}\sin\theta)+(a_{n-1}\sin\theta+b_{n-1}\cos\theta)\mathrm{i}}{a_{n-1}+b_{n-1}\mathrm{i}}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

所以 $\{z_n\}$ 是以 $z_1=1+\mathrm{i}\tan\theta$ 为首项，$\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 为公比的等比数列，于是

$$z_n=(1+\mathrm{i}\tan\theta)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{n-1}=\sec\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\sec\theta(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

故 $a_n=\sec\theta\cos n\theta$，$b_n=\sec\theta\sin n\theta$．

评注　本题也可以用"归纳—猜想—证明"的方法处理，但计算量较大．最后，我们看两道与二项式定理有关的问题．

例 9　证明三角恒等式 $\cos^n\theta=\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cos(n-2k)\theta$，$n\in\mathbf{N}^*$．

分析　由复数的指数形式易知 $\cos^n\theta=\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$，利用二项式定理展开上式右边即证．

证明　由复数的指数形式及二项式定理得

$$\cos^n\theta=\left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(e^{\mathrm{i}\theta})^{n-k}(e^{-\mathrm{i}\theta})^k$$
$$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ke^{\mathrm{i}(n-2k)\theta}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\cos(n-2k)\theta.$$

最后一步成立是因为由欧拉公式，和是实数，故每一项仅剩下实部．事实上，由 $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^{n-k}$ 及 $\sin(-x)=-\sin x$，虚部都抵消了．

评注　对 $n=2,3,4$ 的情形，利用 $\cos(-x)=\cos x$，此恒等式简化为 $\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$，$\cos^3\theta=\frac{3\cos\theta+\cos3\theta}{4}$，$\cos^4\theta=\frac{3+4\cos2\theta+\cos4\theta}{8}$，这些公式是很有用的．



例 10 求证：对任意 $n\in \mathbf{N}$，数 $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}$ 不能被 5 整除.

分析 由于 $2^3 \equiv -2 \pmod 5$，问题等价于证明 $S_n=\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\cdot(-2)^k$ 不能被 5 整除. 用二项式定理展开 $(1+\sqrt{2}\mathrm{i})^{2n+1}$ 即得 S_n，进而获证.

证明 由于 $2^3 \equiv -2 \pmod 5$，问题等价于证明 $S_n=\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\cdot(-2)^k$ 不能被 5 整除.

用二项式定理展开 $(1+\sqrt{2}\mathrm{i})^{2n+1}$，并把偶数项与奇数项分开，可得 $(1+\sqrt{2}\mathrm{i})^{2n+1}=R_n+\sqrt{2}S_n\mathrm{i}$ ①，其中 $R_n=\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k}\cdot(-2)^k$. ①式两边用各自的共轭复数去乘，可得 $3^{2n+1}=R_n^2+2S_n^2$. 由于 $3^2\equiv -1 \pmod 5$，由上式可得 $\pm 3\equiv R_n^2+2S_n^2 \pmod 5$.

这就证明了结论. 事实上，若 $S_n\equiv 0 \pmod 5$，就导致 $R_n^2\equiv \pm 3 \pmod 5$，但由于任意一个完全平方数被 5 除只能余 0，1 或 4，矛盾. 于是 $S_n\equiv 0 \pmod 5$ 是不可能的.

思考交流

思考题 复数 z_1，z_2，z_3，z_4，z_5 满足

$$
\begin{cases}
|z_1|\leqslant 1,\ |z_2|\leqslant 1, \\
|2z_3-(z_1+z_2)|\leqslant |z_1-z_2|, \\
|2z_4-(z_1+z_2)|\leqslant |z_1-z_2|, \\
|2z_5-(z_3+z_4)|\leqslant |z_3-z_4|,
\end{cases}
$$

求 $|z_5|$ 的最大值.

解 由已知不等式及 $|z_1-z_2|+|z_1+z_2|\leqslant 2\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$，得

$$
\begin{aligned}
4|z_5| &= 2|2z_5-(z_3+z_4)+(z_3+z_4)| \\
&\leqslant 2[|2z_5-(z_3+z_4)|+|z_3+z_4|] \\
&\leqslant 2(|z_3-z_4|+|z_3+z_4|) \\
&= |[2z_3-(z_1+z_2)]-[2z_4-(z_1+z_2)]| \\
&\quad +|[2z_3-(z_1+z_2)]+[2z_4-(z_1+z_2)]+2(z_1+z_2)| \\
&\leqslant |[2z_3-(z_1+z_2)]-[2z_4-(z_1+z_2)]| \\
&\quad +|[2z_3-(z_1+z_2)]+[2z_4-(z_1+z_2)]|+2|z_1+z_2| \\
&\leqslant 2|z_1+z_2|+2\sqrt{|2z_3-(z_1+z_2)|^2+|2z_4-(z_1+z_2)|^2}
\end{aligned}
$$

$$\leqslant 2|z_1+z_2|+2\sqrt{2}|z_1-z_2|$$
$$\leqslant 2\sqrt{[1^2+(\sqrt{2})^2]\cdot(|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2)}$$
$$=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2(|z_1|^2+|z_2|^2)}$$
$$\leqslant 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}=4\sqrt{3}.$$

所以 $|z_5|\leqslant\sqrt{3}$. 取 $z_1=e^{i\theta}$, $z_2=e^{-i\theta}$, $z_3=\frac{1}{2}(z_1+z_2)+\frac{\sqrt{6}}{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_4=\frac{1}{2}(z_1+z_2)+\frac{\sqrt{6}}{3}e^{-\frac{\pi}{2}i}$, $z_5=\sqrt{3}$ 时等号成立，其中 $\theta=\arctan\sqrt{2}$. 故 $|z_5|_{\max}=\sqrt{3}$.

同步检测1

一、选择题

1. 当 $z=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ 时，$z^{100}+z^{50}+1$ 的值等于 （　　）

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-i$

2. 设非零复数 x, y 满足 $x^2+xy+y^2=0$，则代数式 $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{1990}+\left(\frac{y}{x+y}\right)^{1990}$ 的值是 （　　）

A. 2^{-1989}　　B. -1　　C. 1　　D. 以上答案都不是

3. 设 a, b, c 均为非零复数，且 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，则 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的值为 （　　）

A. 1　　B. $\pm w$　　C. $1, w, w^2$　　D. $1, -w, -w^2$

（其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$）

4. 设 z 是复数，$z+2$ 的辐角为 $\frac{\pi}{3}$，$z-2$ 的辐角为 $\frac{5}{6}\pi$，则 z 等于 （　　）

A. $-\sqrt{3}+i$　　B. $-1+\sqrt{3}i$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　　D. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. 已知集合 $P=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+4(n-1)(n\in\mathbf{N}^*, n\neq 1)$，又知集合 $Q=\{n\mid(1+i)^{2n}=2^n i, n\in\mathbf{N}^*\}$，则 P 与 Q 的关系是 （　　）

A. $P\subset Q$　　B. $P=Q$　　C. $P\supset Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

6. 已知复数 $z=1-\sin\theta+i\cos\theta\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的辐角主值是

（　　）

A. $\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$　B. $\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$　C. $\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$　D. $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}$

二、填空题

7. 设 $n=1990$，则 $\frac{1}{2^n}(1-3C_n^2+3^2C_n^4-3^3C_n^6+\cdots+3^{994}C_n^{1988}-3^{995}C_n^{1990})=$ ______

8. 使复数 $z=\frac{\sin x+\sin 2x+i(2\cos^2 x\sin x-\tan x)}{\cos x-i}$ 成为实数的所有 x 构成的集合是______.

9. 实系数多项式 $f(x)$ 满足 $f(i)=k(k\in\mathbf{R})$，则 $f(i^3)=$

10. 已知复数 z 满足 $\left|2z+\frac{1}{z}\right|=1$，则 z 的辐角主值的取值范围是______

11. 定义一个复数序列如下：$z_1=0$，$z_{n+1}=z_n^2+i$，$n\geqslant 1$. 那么，在复平面上，复数 z_{111} 对应的点到坐标原点的距离是______.

12. 设 $(1+x+x^2)^{1000}$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2000}x^{2000}$，则 $a_0+a_3+a_6+\cdots+a_{1998}$ 的值是

三、解答题

13. 是否存在这样的正整数 n，使复数 $z=\left[\frac{3}{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}\right]^n$ 是纯虚数？若存在，求出正整数 n 的值；若不存在，请说明理由

14. 已知复数 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$u=\cos\beta+i\sin\beta$，且 $z+u=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，求 $\tan(\alpha+\beta)$

15. 设复数 z_1，z_2 满足 $|z_1|=|z_1+z_2|=3$，$|z_1-z_2|=3\sqrt{3}$，试求 $\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}|$ 的值.

16. 设 $\pi<\theta<2\pi$，复数 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$，$u=a^2+ai$，且 zu 是纯虚数，$a\in\mathbf{R}$

(1) 求复数 u 的辐角主值(用 θ 的代数式表示)；

(2) 记 $w=z^2+u^2+2zu$，试问：w 可能是正实数吗？为什么？

17. 设复数 z 满足 $|z|=1$，试求 $|z^3-3z-2|$ 的最大值与最小值.

18. 已知 $x^2+y^2\leqslant 1$，$a^2+b^2\leqslant 2$，x、y、a、$b\in\mathbf{R}$. 求证：$|b(x^2-y^2)+2axy|\leqslant\sqrt{2}$

19. 对 $n\in\mathbf{N}^*$，令 S_n 为 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}$ 的最小值，其中 a_1，a_2，…，$a_n\in\mathbf{R}^+$，且 $\sum_{k=1}^{n}a_k=17$，若存在 n，使 S_n 也是整数，求一切 n 的值

20. 设 $z=x+yi$ 是复数，其中 x、y 是有理数，$|z|=1$，求证：对于任意整数 n，$|z^{2n}-1|$ 是有理数



第2讲 复数及其运算的几何意义

知识点

复数的几何形式，使得复数本身及其运算有了几何意义。

复数的加法可以按照向量加法的平行四边形法则来进行；两个复数的差 z_1-z_2 与连结两个向量终点并指向被减数的向量对应。

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则两个复数的乘积 z_1z_2 对应的向量就是把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆时针方向旋转一个角 θ_2（若 $\theta_2<0$，则把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转一个角 $|\theta_2|$），再把它的模变为原来的 r_2 倍。两个复数相除亦有类似的几何性质。

设复数 z，z_1，z_2 在复平面内的对应点分别为 Z，Z_1，Z_2，由复数及其运算的几何意义，我们容易得到以下结论：

(1) $|z_1-z_2|$ 表示两点 Z_1，Z_2 间的距离。

(2) 满足 $|z-z_1|=|z-z_2|$ 的复数 z 对应的点的轨迹是线段 Z_1Z_2 的垂直平分线。

(3) 满足 $|z-z_1|=r(r>0)$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以点 Z_1 为圆心，r 为半径的圆。

(4) 满足 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a(0<|Z_1Z_2|<2a)$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以点 Z_1，Z_2 为焦点，长轴长为 $2a$ 的椭圆。

(5) 满足 $||z-z_1|-|z-z_2||=2a(|Z_1Z_2|>2a>0)$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以点 Z_1，Z_2 为焦点，实轴长为 $2a$ 的双曲线。

(6) 满足 $\arg z=\theta(\theta\in[0,2\pi))$ 的复数 z 对应的点的轨迹是以原点为端点的一条射线（以 x 正半轴为始边，此射线为终边的最小非负角为 θ）。

利用复数的几何意义，给某些数量关系以几何解释，适当将数值关系问题转化成图形性质问题，通过图形求解。这种数形结合的思想方法，不仅增强了问题的直观性，而且

能起到化难为易、化繁为简的作用.



例题精析

例1 已知复数 z_1, z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$.

(1) 若 $z_1-z_2=\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$，求 z_1, z_2 的值;

(2) 若 $z_1+z_2=\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i$，求 z_1z_2 的值.

分析 注意到 z_1+z_2, z_1-z_2 分别是以 $|z_1|$, $|z_2|$ 为邻边的平行四边形的对角线，于是，可结合复数乘、除法的几何意义求解.

解 (1) 因为 $|z_1-z_2|=1=|z_1|=|z_2|$，所以 $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1-z_2|$ 是正三角形的边长. 复数 z_1, z_2 分别可以看作 z_1-z_2 按顺时针或逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ 得到，

于是 $z_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{6}[(\sqrt{6}+3)+(\sqrt{3}-3\sqrt{2})i]$,

$z_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{6}[(-\sqrt{6}+3)+(-\sqrt{3}-3\sqrt{2})i]$;

或 $z_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{6}[(\sqrt{6}-3)+(\sqrt{3}+3\sqrt{2})i]$,

$z_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{6}[(-\sqrt{6}-3)+(-\sqrt{3}+3\sqrt{2})i]$.

(2) 因为 $|z_1+z_2|=1=|z_1|=|z_2|$，所以 $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$ 是顶角为 $\frac{2\pi}{3}$，以 $|z_1|$, $|z_2|$ 为腰的等腰三角形. z_1+z_2 按逆(顺)时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后，就可得出 z_1 或 z_2 (见图2-1).

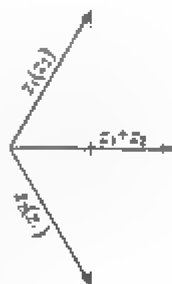


图2-1

设 $z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$，则当 $z_1=(z_1+z_2)z_0$ 时，$z_2=\frac{z_1+z_2}{z_0}$；当 $z_1=\frac{z_1+z_2}{z_0}$ 时，$z_2=(z_1+z_2)z_0$. 于是 $z_1z_2=(z_1+z_2)^2=\left(\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i\right)^2=\frac{119}{169}-\frac{120}{169}i$.



评注 对于第(1)小题，应用复数减法的几何意义就可直接求出 z_1，z_2，但应注意复数对应的向量的旋转方向和具有相同的始点

例 2 已知平行四边形 $ABCD$ 的两个顶点 $A(0, 0)$，$B(4, -3)$，点 P 内分对角线 AC 为 $2:1$ 当点 D 在以 A 为圆心，3 为半径的圆周上运动时，求点 P 的轨迹.

分析 利用定比分点的知识求解

解 设 B，C，D，P 对应的复数为 z_B，z_C，z_D，z_P，则由定比分点的知识，得

$$\begin{cases} z_C = z_B + z_D & ① \\ z_C = \dfrac{3}{2}z_P & ② \end{cases}$$

由①，得 $z_D = z_C - z_B$，由 $|z_D| = 3$ 及①，②知 $\left|\dfrac{3}{2}z_P - z_B\right| = 3$，所以 $\left|z_P - \dfrac{2}{3}z_B\right| = 2$ ③，

将 $z_B = 4-3i$ 代入③，得 $\left|z_P - \left(\dfrac{8}{3} - 2i\right)\right| = 2$ 这说明所求的轨迹是以点$\left(\dfrac{8}{3}, -2\right)$为圆心，半径长为 2 的圆.

评注 利用复数来处理轨迹问题，可以视为复数在解析几何中的应用，从本质上而言，它们都是向量的具体表达形式，在向量观点下，两种方法是统一的 当涉及对象只限于向量的加减或旋转，伸缩时，不妨利用复数求解

例 3 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 内有一点 $M(P, 0)$，且 $0 < P < a$，椭圆上的动点 Q，向量$\overrightarrow{MQ}$按顺时针方向绕点 M 旋转 $90°$ 到达$\overrightarrow{MP}$，试求点 P 的轨迹方程.

分析 用复数语言来实施向量的旋转变换是较好的选择

解 设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上的动点 Q 的坐标为$(a\cos\theta, b\sin\theta)$，则$\overrightarrow{MQ}$对应的复数是 $(a\cos\theta - P) + (b\sin\theta)i$.

$\overrightarrow{MQ}$绕点 M 按顺时针方向旋转 $90°$到$\overrightarrow{MP}$，记点 P 的坐标为(x, y)，于是

$(a\cos\theta - P + bi\sin\theta)(-i) = x - P + yi$.

即 $b\sin\theta + (P - a\cos\theta)i = x - P + yi$. 所以

$$\begin{cases} x - P = b\sin\theta \\ y = P - a\cos\theta \end{cases}$$

消去参数 θ，即得点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{(x-P)^2}{b^2} + \dfrac{(y-P)^2}{a^2} = 1$

例 4 在复平面内，A 点对应复数 2，动点 B 在以原点为圆心，1 为半径的圆上运动，以 AB 为边作正三角形 ABC（A、B、C 按逆时针方向排列）求动点 C 的轨迹

分析 三角形 ABC 为正三角形（A、B、C 按逆时针方向排列）的充要条件是将向量

$\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与向量 $\overrightarrow{AC}$ 重合，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\overrightarrow{AC}$. 由此不难求得动点 C 的轨迹方程.

解 如图2-2所示，设动点 C 对应的复数为 z，A、B 分别对应复数 z_A，z_B，则 $z_A=2$，$|z_B|=1$.

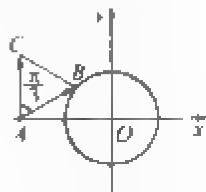


图2-2

由题设，$\triangle ABC$ 为正三角形，故将向量 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与向量 $\overrightarrow{AC}$ 重合，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\overrightarrow{AC}$，

于是 $(z_B-z_A)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=z-z_A$.

所以 $z_B=(z-z_A)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]+z_A$. 两边取模，且由 $|z_B|=1$ 及 $z_A=2$，

得 $\left|\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[(z-2)-2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]\right|=1$.

即 $|z-(-1+\sqrt{3}i)|=1$. 故动点 C 的轨迹是以点 $(-1,\sqrt{3})$ 为圆心，1为半径的圆.

例5 已知复数 z 满足 $\arg(z+3)=\frac{3}{4}\pi$，问 z 取何值时，$u=\frac{1}{|z+6|+|z-3i|}$ 取得最大值，并求出这个最大值.

分析 复平面内，方程 $\arg(z+3)=\frac{3}{4}\pi$ 表示的曲线是以 $A(-3,0)$ 为端点，倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ 的射线 AE，而 $|z+6|+|z-3i|$ 表示射线 AE 上一点到点 $B(-6,0)$ 与点 $C(0,3)$ 的距离之和，故利用图形的直观性及解析几何的知识即可求解.

解 复平面内，方程 $\arg(z+3)=\frac{3}{4}\pi$ 表示的曲线是以 $A(-3,0)$ 为端点，倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ 的射线 AE（如图2-3），因此问题化归为在射线 AE 上求一点 Z（与复数 z 对应），使 $|z+6|+|z-3i|$ 的值最小，而 $|z+6|+|z-3i|$ 表示射线 AE 上一点到点 $B(-6,0)$ 与点 $C(0,3)$ 的距离之和.

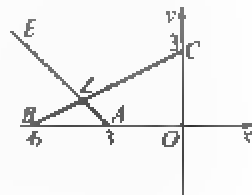


图2-3

如图2-3所示，显然线段 BC 与射线 AE 相交，则 $|z+6|+|z-3i|$ 的最小值为 $|BC|=\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$，所以 $u_{\max}=\frac{1}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{15}$. 当 u 取得最大值时，易求得线段 BC 与射线 AE 的交点 Z 的坐标为 $(-4,1)$，即 $z=-4+i$.



综上所述，当 $z=-4+i$ 时，$u_{max}=\frac{\sqrt{5}}{15}$.

例 6 已知复数 $z_1=\frac{\cos x^2}{\sin y^2}+i\cdot\frac{\cos y^2}{\sin x^2}$，$z_2=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$. 若当 x,y 取遍区间 $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ 中的所有实数时，$|z_1|$ 恒等于 $\sqrt{2}$. 试求 $|z_1-z_2|$ 的最大值与最小值.

分析 先探求 z_1、z_2 的对应点的轨迹.

解 由题设，对任何 $x^2,y^2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，恒有 $\left(\frac{\cos x^2}{\sin y^2}\right)^2+\left(\frac{\cos y^2}{\sin x^2}\right)^2=2$ ①

若 $x^2+y^2>\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}\geqslant x^2>\frac{\pi}{2}-y^2\geqslant 0$，于是 $0\leqslant\cos x^2<\sin y^2$，$0\leqslant\cos y^2<\sin x^2$，故 $\left(\frac{\cos x^2}{\sin y^2}\right)^2+\left(\frac{\cos y^2}{\sin x^2}\right)^2<2$，与①式矛盾.

若 $x^2+y^2<\frac{\pi}{2}$，同理可得 $\left(\frac{\cos x^2}{\sin y^2}\right)^2+\left(\frac{\cos y^2}{\sin x^2}\right)^2>2$，也与①式矛盾.

这样一来，对于任何 $x^2,y^2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，都有 $x^2+y^2=\frac{\pi}{2}$，从而 $z_1=1+i$，故 z_1 的轨迹仅表示点 $Z_1(1,1)$，z_2 的轨迹表示圆心在原点，半径为 $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的圆.

按图2-4，易求得当 $z_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1+i)$ 时，$|z_1-z_2|$ 有最小值 $\sqrt{2}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$；当 $z_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-i)$ 时，$|z_1-z_2|$ 有最大值 $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

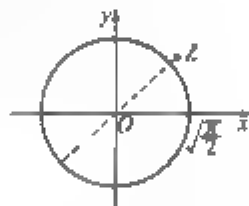


图2-4

例 7 设复数 z 满足 $\arg\left(\frac{z+1}{z+2}\right)=\frac{\pi}{6}$，求 $\arg z$ 的取值范围.

分析 数形结合是处理涉及辐角主值问题的一种有效手段.

解 令 $\arg\left(\frac{z+1}{z+2}\right)=\theta$，则 $z+1=\lambda(z+2)e^{i\theta}$，$\lambda\geqslant 0$.

如图2-5所示，设 $A(-2,0)$、$B(-1,0)$，则 $\overrightarrow{BZ}=\lambda\cdot\overrightarrow{AZ}\cdot e^{i\theta}$.

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，向量 $\overrightarrow{AZ}$ 逆时针旋转 θ 角后与 $\overrightarrow{BZ}$ 平行，

故 $\angle AZB=\frac{\pi}{6}$，从而 z 的轨迹的一部分是以 $O_1\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 为圆

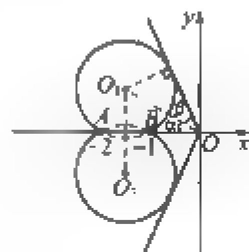


图2-5

心，半径为1的圆的一段优弧$\overset{\frown}{AB}$（含B，不含A）；当$\theta=-\frac{\pi}{6}$时，由对称性知，z的轨迹的另一部分是以$O_2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$为圆心，半径为1的圆的一段优弧$\overset{\frown}{AB}$（含$B$，不含$A$）。其中易计算得$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$；$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\beta=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$。

所以 $\arg z$ 的取值范围是$\left[\frac{5\pi}{6}-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{7\pi}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

评注 一般地，辐角方程$\arg\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right)=\theta\Leftrightarrow\overrightarrow{Z_2Z}=\lambda\overrightarrow{Z_1Z}\cdot e^{i\theta}(\lambda>0)$表示的轨迹是以$Z_1Z_2$为弦所对的一段圆弧.

例8 设复数z满足$|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$，其中z_1，z_2为给定的不同复数，λ为正实常数. 试讨论复数z在复平面内对应点的轨迹.

分析 利用$|z|^2=z\cdot\bar{z}$可将$|z-z_1|^2=\lambda^2|z-z_2|^2$变形，求出$z$所满足的方程.

解 分两种情况讨论：

(1) 当$\lambda=1$时，方程的曲线是线段Z_1Z_2的垂直平分线.

(2) 当$\lambda\neq1$时，方程等价于$(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)=\lambda^2(z-z_2)(\bar{z}-\bar{z}_2)$.

展开整理，得 $|z|^2-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\bar{z}-\frac{\bar{z}_1-\lambda^2\bar{z}_2}{1-\lambda^2}z=\frac{\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-\lambda^2}$，即

$$|z|^2-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\bar{z}-\frac{\bar{z}_1-\lambda^2\bar{z}_2}{1-\lambda^2}z+\left|\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2$$

$$=\frac{\lambda^2|z_2|^2-|z_1|^2}{1-\lambda^2}+\left|\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2.$$

故 $$\left|z-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2=\left|\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2-\frac{|z_1|^2-\lambda^2|z_2|^2}{1-\lambda^2}.$$

由复数模不等式与反向柯西不等式，知

$$\left|\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2\geqslant\left|\frac{|z_1|-\lambda^2|z_2|}{1-\lambda^2}\right|^2\geqslant\frac{|z_1|^2-\lambda^2|z_2|^2}{1-\lambda^2},$$

故上面的方程有意义. 从而 $\left|z-\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|=\sqrt{\left|\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}\right|^2-\frac{|z_1|^2-\lambda^2|z_2|^2}{1-\lambda^2}}$.

故当$\lambda\neq1$时，z的对应点在复平面内的轨迹是以复数$z_0=\frac{z_1-\lambda^2z_2}{1-\lambda^2}$的对应点为圆心，半径为$r=\sqrt{|z_0|^2-\frac{|z_1|^2-\lambda^2|z_2|^2}{1-\lambda^2}}$的圆.

评注 当$\lambda\neq1$时，所得的圆在平面几何中称为Z点关于$\overline{Z_1Z_2}$的阿波罗尼斯圆



例9 n 是正整数，$a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为复数，且对集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任一非空子集 I，均有 $\left|\prod_{j\in I}(1+a_j)-1\right|\leqslant\frac{1}{2}$. 试证 $\sum_{j=1}^{n}|a_j|\leqslant 3$.

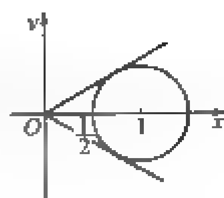


图2-6

证明 设 $1+a_j=r_je^{i\theta_j}$，$r_j\geqslant 0$，$|\theta_j|\leqslant\pi$，$j=1,2,\cdots,n$，则题设条件变为 $\left|\prod_{j\in I}r_j\cdot e^{i\sum_{j\in I}\theta_j}-1\right|\leqslant\frac{1}{2}$ ①.

先证如下引理：设 r、θ 为实数，$r\geqslant 0$，$|\theta|\leqslant\pi$，$|re^{i\theta}-1|\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{3}{2}$，$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$，$|re^{i\theta}-1|\leqslant|r-1|+|\theta|$.

引理的证明：如图2-6所示，由复数的几何意义，有 $\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{3}{2}$，$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$.
又由

$$
\begin{aligned}
|re^{i\theta}-1|&=|r(\cos\theta+i\sin\theta)-1|\\
&=|(r-1)(\cos\theta+i\sin\theta)+[(\cos\theta-1)+i\sin\theta]|\\
&\leqslant|r-1|+\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}=|r-1|+\sqrt{2(1-\cos\theta)}\\
&=|r-1|+2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant|r-1|+|\theta|.
\end{aligned}
$$

得引理的另一部分.

由①及引理，对 $|I|$ 用数学归纳法知 $\frac{1}{2}\leqslant\prod_{j\in I}r_j\leqslant\frac{3}{2}$，$\left|\sum_{j\in I}\theta_j\right|\leqslant\frac{\pi}{6}$ ②.

由①及引理知 $|a_j|=|r_je^{i\theta_j}-1|\leqslant|r_j-1|+|\theta_j|$.

因此

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}|a_j|&\leqslant\sum_{j=1}^{n}|r_j-1|+\sum_{j=1}^{n}|\theta_j|\\
&=\sum_{r_j\geqslant 1}|r_j-1|+\sum_{r_j<1}|r_j-1|+\sum_{\theta_j\geqslant 0}|\theta_j|+\sum_{\theta_j<0}|\theta_j|.
\end{aligned}
$$

由②知 $\sum_{r_j\geqslant 1}|r_j-1|=\sum_{r_j\geqslant 1}(r_j-1)\leqslant\prod_{r_j\geqslant 1}[1+(r_j-1)]-1\leqslant\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$，

$$\sum_{r_j<1}|r_j-1|=\sum_{r_j<1}(1-r_j)\leqslant\prod_{r_j<1}[1-(1-r_j)]^{-1}-1\leqslant 2-1=1,$$

$$\sum_{\theta_j\geqslant 0}|\theta_j|+\sum_{\theta_j<0}|\theta_j|=\sum_{\theta_j\geqslant 0}\theta_j-\sum_{\theta_j<0}\theta_j\leqslant\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

综上，有 $\sum_{j=1}^{n}|a_j|\leqslant\frac{1}{2}+1+\frac{\pi}{3}<3$.



例10 是否存在非零复数 a,b,c 及正整数 h，使得：只要整数 k,l,m 满足 $|k|+|l|+|m|\geq 1996$ 就必定成立 $|ka+lb+mc|>\frac{1}{h}$？

解 不存在，用反证法.

若不然，设非零复数 a,b,c 及 $h\in\mathbf{N}$ 满足要求. 考虑复平面，不妨设复数 a,b 对应的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线（否则，三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都共线，问题更简单）. 取以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在直线为坐标轴，以 $|a|,|b|$ 为单位长度建立斜角坐标系，过坐标轴上每一整点作另一坐标轴的平行线，将复平面分为全等的平行四边形网络.

再考虑复数 c 对应向量 $\boldsymbol{c}$ 所在直线，对每个 $m\in\mathbf{Z}$，mc 为这条直线上一点，称为"c-整点". 将每个含有 c-整点的平行四边形平移到位于第一象限，以原点为其一个顶点的平行四边形中，并使两者重合，记 mc 此时所在点为 c'-整点，则存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{Z}$，使 c'-整点对应复数为 $mc-\lambda a-\mu b$.

将 c'-整点所在平行四边形用平行于其他的平行线划分为一些平行四边形，使其对角线长小于 $\frac{1}{1996h}$. 由抽屉原理，必存在两个 c'-整点在同一个小平行四边形中，它们之间的距离小于 $\frac{1}{1996h}$.

设两个 c'-整点对应复数为 $m_ic-\lambda_ia-\mu_ib\ (i=1,2)$，故

$$|(m_1-m_2)c-(\lambda_1-\lambda_2)a-(\mu_1-\mu_2)b|<\frac{1}{1996h}.$$

即
$$|1996(m_1-m_2)c+1996(\lambda_2-\lambda_1)a+1996(\mu_2-\mu_1)b|<\frac{1}{h}.$$

这里显然有 $|1996(m_1-m_2)|+|1996(\lambda_2-\lambda_1)|+|1996(\mu_2-\mu_1)|\geq 1996$.

与题设矛盾. 故不存在非零复数 a,b,c 及正整数 h 满足要求.



思考题1 已知集合 $A=\{z\,|\,|z-c|+|z+c|=2a,z\in\mathbf{C},a>c>0\}$，若当 a,c 取遍所有正实数时，恒有 $z=2+\mathrm{i}\in A$，试在复平面内作出集合 A 表示的图形.

解 对于给定的正数 $a,c(a>c)$，方程 $|z-c|+|z+c|=2a$ 表示椭圆，其方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b=\sqrt{a^2-c^2})$. 依题设，对任意 a,b 有 $\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$. 所以 $b^2=\frac{a^2}{a^2-4}$.

注意到 $a>b$，有 $a^2>5$. 所以有 $x^2+(a^2-4)y^2=a^2$，即 $x^2-4y^2=a^2(1-y^2)$



(1) 若 $1-y^2=0$，则 $|y|=1$ 且 $x^2-4y^2=0$，解得 $x=\pm2, y=\pm1$，即点集 $A_1=\{(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)\}\subset A$.

(2) 若 $1-y^2>0$，则 $|y|<1$ 且 $x^2-4y^2>5(1-y^2)$，即 $|y|<1$ 且 $x^2+y^2>5$，所以 $A_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2>5$ 且 $|y|<1\}\subset A$.

(3) 若 $1-y^2<0$，则 $|y|>1$ 且 $x^2+y^2<5$，于是 $A_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2<5$ 且 $|y|>1\}\subset A$.

综上所述，$A=A_1\cup A_2\cup A_3$（图2-6中的阴影部分表示 A）.

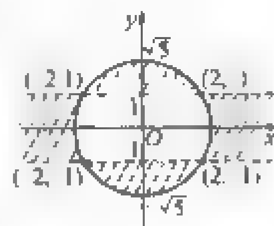


图2-6

思考题2 复平面内点 A、B 对应的复数分别为 $z_1=2$，$z_2=-3$，点 P 对应的复数为 z，且 $\frac{z-z_1}{z-z_2}$ 的辐角主值为 φ，当点 P 在以原点为圆心，1为半径的上半圆周上（不包括两个端点）运动时，求 φ 的最小值.

解 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in(0,\pi)$，如图2-7所示，记 $\arg(z-z_1)=\alpha$，$\arg(z-z_2)=\beta$，则由复数除法的几何意义知 $\varphi=\alpha-\beta$，且 $\varphi\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

由 $\tan\alpha=\frac{\sin\theta}{\cos\theta-2}$，$\tan\beta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+3}$，得

$$\tan\varphi=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{5\sin\theta}{\cos\theta-5},$$

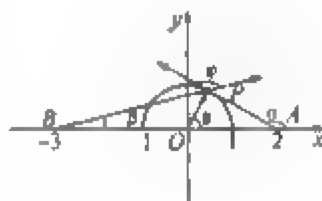


图2-7

所以，有 $5\sin\theta-\tan\varphi\cdot\cos\theta=-5\tan\varphi$.

于是，$\sqrt{5^2+(-\tan\varphi)^2}\geqslant|-5\tan\varphi|$，

解得 $|\tan\varphi|\leqslant\frac{5\sqrt{6}}{12}$，又 $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$，故 $\varphi\geqslant\pi-\arctan\frac{5\sqrt{6}}{12}$.

当 $z=\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}i$ 时等号成立. 因此 φ 的最小值为 $\pi-\arctan\frac{5\sqrt{6}}{12}$.

同步检测2

一、选择题

1. 若 $|z_1|=|z_2|=1$，且 $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，则 $|z_1-z_2|$ 等于 （　　）

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

2. 若复数 z 满足 $z+\frac{1}{z}\in\mathbf{R}$，且 $|z-2|=\sqrt{2}$，则这样的复数有 ( )

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 4 个　　D. 6 个

3. 设复数 z_1,z_2 在复平面内的对应点分别为 A,B，且 $|z_1|=4$，$4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$，O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积为 ( )

A. $8\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $6\sqrt{3}$　　D. $12\sqrt{3}$

4. 已知 z 满足 $|z+5-12i|=3$，则 $|z|$ 的最大值是 ( )

A. 3　　B. 10　　C. 20　　D. 16

5. 设集合 $M=\{z\mid z=\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t}i, t\in\mathbf{R}, t\neq-1$ 且 $t\neq0\}$，$N=\{z\mid z=\sqrt{2}[\cos(\arcsin t)+i\cos(\arccos t)], t\in\mathbf{R}, |t|\leqslant1\}$，则 $M\cap N$ 中的元素个数是 ( )

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

6. 复数 z_1,z_2,z_3,z_4 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$，且 $z_1+z_2+z_3+z_4=0$，则以四个复数对应的点为顶点的四边形一定是 ( )

A. 梯形　　B. 正方形　　C. 矩形　　D. 平行四边形

二、填空题

7. 设复平面上单位圆内接正 20 边形的 20 个顶点所对应的复数依次为 $z_1,z_2,\cdots,z_{20}$，则复数 $z_1^{1995},z_2^{1995},\cdots,z_{20}^{1995}$ 所对应的不同的点的个数是________

8. 已知复数 z 满足 $|z-1-2i|=1$，则 $|z-3-i|$ 的最大值为________，最小值为____

9. 已知复数 $z=\cos\alpha+i(1-\sin\alpha)$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},2\pi\right)$，若 $w=z^2-2iz$，则复平面上 w 所对应的点的轨迹是________.

10. 设 z_1,z_2 都是复数，且 $|z_1|=3$，$|z_2|=5$，$|z_1+z_2|=7$，则 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3$ 的值是________

11. 设复数 z 满足 $\arg z=\arg(iz+i)$，则 z 在复平面上对应的图形的周长为____

12. 设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in[0,\pi]$，复数 $z,(1+i)z,2z$ 在复平面上对应的三个点分别是 P,Q,R，当 P,Q,R 不共线时，以线段 PQ、PR 为两边的平行四边形的第四个顶点为 S，则点 S 到原点距离的最大值是______

三、解答题

13. 设一元三次方程 $x^3+px+1=0$ 的三根在复平面上所对应的点组成一个正三角形，求此三角形的面积.



14. 已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$的右焦点为$F$、$B$为椭圆上一动点，$\triangle FAB$为正三角形，且$F$、$A$、$B$依逆时针排序，求点$A$的轨迹

15. 设复平面上，$\triangle ABC$的三个顶点对应的复数分别为z_1、z_2、z_3，已知$|z_1|=3$，$z_2=\overline{z_1}$，$z_3=\frac{1}{z_1}$，求$\triangle ABC$的面积的最大值

16. 已知复数z满足$\arg(z+a+ai)=\frac{\pi}{4}$，且$\arg(z-a-ai)=\frac{5\pi}{4}(a\in\mathbf{R}^+)$，求$\arg(z-b+bi)(a>b>0)$的取值范围

17. 已知一动圆与定圆$|z-(1+i)|=2$外切，又与定圆$|z-(1-5i)|=10$内切，求此动圆圆心的轨迹

18. 设A_1，A_2，…，A_n是平面上任意n点，求到诸A_k点$(k=1,2,\cdots,n)$的距离平方和为常数的动点P的轨迹

19. 设A、B、C分别是复数$z_0=ai$，$z_1=\frac{1}{2}+bi$，$z_2=1+ci$对应的不共线的三点(a，b，c都是实数)，求证：曲线$z=z_0\cdot\cos^4 t+2z_1\cdot\cos^2 t\cdot\sin^2 t+z_2\cdot\sin^4 t(t\in\mathbf{R})$与$\triangle ABC$中平行于$AC$的中位线只有一个公共点，并求出此点。

20. 在复平面上有三个点：$c_1=m+bi$，$c_2=a+bi$，$c_3=a+ni$，其中$a>m$，$n>b$，S_1，S_2，S_3(这里S_i表示复数$c_i(i=1,2,3)$对应的点)组成一个三角形，求证：满足$\frac{1}{z-c_1}+\frac{1}{z-c_2}+\frac{1}{z-c_3}=0$的复数$z$所代表的点$Z$位于这个三角形的内部



第 讲　复数与方程

知识点金

由于复数的引入，代数方程的有关问题出现了新的内容．在复数范围内，对于一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0(a_n\neq 0)$，我们不加证明地给出下述一些结论：

(1) 代数基本定理：复系数的一元 n 次方程有且仅有 n 个根(k 重根按 k 个根计算)；

(2) 韦达定理：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该方程的 n 个复根，则它们与方程的系数之间成立如下关系

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

(3) 实系数方程虚根成对定理：若 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是实数，则对方程的任意复根 x，其共轭复数 $\bar{x}$ 也是该方程的根．

这些使我们能够更深入地研究代数方程的解以及相关问题．

复数方程类型繁多，解复数方程的方法也很多．

对于复系数的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，我们可将原来的实数范围内

的一元二次方程的求根公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ($b^2-4ac<0$) 中的 $\sqrt{b^2-4ac}$ 改为 b^2-4ac 的平方根，则求根公式依然成立。

对于二项方程 $x^n-a=0$，可令 $a=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0$，$\theta\in\mathbf{R}$)，利用复数开方，即得该方程的 n 个根为 $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$，这里 $k=0,1,\cdots,n-1$。

一般地，对于低次方程，可以利用复数相等的充要条件，转化为实数问题求解。有时，也可以采用以模为突破口，先求模 $|z|$，再求复数。



例题精析

例 1 设 $a\geqslant0$，在复数集 $\mathbf{C}$ 中解方程 $z^2+2|z|=a$。

分析 设 $z=x+yi$ ($x,y\in\mathbf{R}$)，代入原方程，利用复数相等的充要条件，转化为实数问题求解。

解 设 $z=x+yi$ ($x,y\in\mathbf{R}$)，代入原方程，得 $x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a$。

根据复数相等的充要条件，得 $\begin{cases}x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ①\\ 2xy=0. & ②\end{cases}$

由②，得 $x=0$ 或 $y=0$。所以原方程若有解，其解为实数或纯虚数。

下面分别加以讨论。

(1) 若 $y=0$，问题化为在实数范围内解方程 $x^2+2|x|=a$。③

解方程③，得 $|x|=-1+\sqrt{1+a}$，所以原方程的实数解是 $z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$。

(2) 若 $x=0$，由于 $y=0$ 的情形已作讨论，现只考察 $y\neq0$ 的情形，即求原方程的纯虚数解 $z=yi(y\neq0)$。此时，①化为 $-y^2+2|y|=a$。④

解方程④，得 $|y|=1\pm\sqrt{1-a}$ ($0\leqslant a\leqslant1$)。

即当 $0\leqslant a\leqslant1$ 时，原方程的纯虚数解是 $z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$ 或 $z=\pm(1-\sqrt{1-a})i$ ($a\neq0$)。

而当 $a>1$ 时，方程④无实根，原方程无纯虚数解。

例 2 求方程 $z^3+z=1$ 的模为 1 的所有复数解。

分析 1 以模为突破口，将方程变形为 $z^3=1-z$，两边取模，并结合 $|z|=1$，得 $|z-1|=1$。由此解出 z，并代回原方程检验即可。

解法 1 原方程即 $z^3=1-z$。两边取模，并结合 $|z|=1$，得 $|z-1|=1$。



由 $|z|=1$，$|z-1|=1$，以及复数的几何意义，易求得 $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

设 w 为 1 的三次单位虚根，则 $z=-w$，于是

$z^{11}+z=(-w)^{11}-w=-w^2-w=1$.

故 $z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 是原方程的模为 1 的解.

分析 2 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$，利用复数相等的充要条件，将问题转化为三角问题求解.

解法 2 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$，代入原方程，得

$\cos 11\theta+i\sin 11\theta=1-\cos\theta-i\sin\theta$.

由复数相等的充要条件，得 $\begin{cases}\cos 11\theta=1-\cos\theta & ①\\ \sin 11\theta=-\sin\theta & ②\end{cases}$

①^2+②^2，得 $(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=1$.

即 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，又 $\theta\in[0,2\pi)$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{5}{3}\pi$.

显然，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{5\pi}{3}$ 均为方程组的解，因此 $z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 是原方程的模为 1 的解.

例 3 已知关于 x 的二次方程 $a(1+i)x^2+(1+a^2i)x+a^2+i=0$ 有实根，求实数 a 的值.

分析 设方程的实根为 x_0，代入原方程，根据复数相等的充要条件，转化为实数问题求解.

解 设方程的实根为 x_0，则 $a(1+i)x_0^2+(1+a^2i)x_0+a^2+i=0$，即

$$(ax_0^2+x_0+a^2)+(ax_0^2+a^2x_0+1)i=0.$$

根据复数相等的充要条件，得 $\begin{cases}ax_0^2+x_0+a^2=0 & ①\\ ax_0^2+a^2x_0+1=0 & ②\end{cases}$

②−①，并整理，得 $(x_0-1)(a^2-1)=0$，所以 $x_0=1$ 或 $a^2=1$.

当 $x_0=1$ 时，代入①，有 $a^2+a+1=0$.

显然，此方程无实根，与 $a\in\mathbf{R}$ 矛盾，故 $x_0\neq 1$.

当 $a^2=1$ 时，有 $a=\pm 1$，同理，$a=1$ 也不适合，故 $a=-1$，此时 $x_0=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

综上所述，$a=-1$.

例 4 已知实系数方程 $x^3+2(k-1)x^2+9x+5(k-1)=0$ 有一个模为 $\sqrt{5}$ 的虚根，求 k 的值，并解此方程.

分析 由实系数方程虚根成对定理，知原方程有一个实根和两个模为$\sqrt{5}$的共轭虚根．利用韦达定理求解．

解 由实系数方程虚根成对定理，知原方程有一个实根和两个模为$\sqrt{5}$的虚根，它们互为共轭虚数．设这三个根为$a+bi$，$a-bi$，c（$a,b,c\in\mathbf{R}$，$b\neq 0$），则$a^2+b^2=5$ ①

再由韦达定理，得
$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)+c=-2(k-1)\\(a+bi)(a-bi)+c(a+bi)+c(a-bi)=9\\(a+bi)(a-bi)c=-5(k-1)\end{cases}$$

结合①，整理得
$$\begin{cases}2a+c=-2(k-1) & ②\\ac=2 & ③\\c=-k+1 & ④\end{cases}$$

由②、④知$c=1-k$，$a=\frac{1}{2}(1-k)$，并将其代入③，可得$k=-1$或3．

再求原方程的解：当$k=-1$时，原方程的解为$1-2i$，$1+2i$，2；当$k=3$时，原方程的解为$-1+2i$，$-1-2i$，-2．

例5 求证：实系数三次方程$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$的三个根的实部都小于零的充要条件是a_0,a_1,a_2,a_3同号且$a_1a_2-a_0a_3>0$．

分析 根据实系数方程虚根成对定理，原方程或者有三个实根，或者有一个实根和两个共轭虚根，分类讨论．

证明 充分性 设原方程的三个根为x_1,x_2,x_3，由韦达定理，得

$\frac{a_1}{a_0}=-(x_1+x_2+x_3)$，

$\frac{a_2}{a_0}=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$，

$\frac{a_3}{a_0}=-x_1x_2x_3$．

(1) 若x_1,x_2,x_3都是实数，由$\frac{a_3}{a_0}>0$知$x_1x_2x_3<0$，故x_1,x_2,x_3中至少有一个是负的，不妨设$x_1<0$，则$x_2x_3>0$．

又$a_0\neq 0$，且$a_1a_2-a_0a_3>0$，则有$\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_0}-\frac{a_3}{a_0}>0$，

即：$-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1x_2x_3>0$，

亦：$-(x_2+x_3)(x_1^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)>0$，

因$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{a_2}{a_0}>0$，故$x_2+x_3<0$．又$x_2x_3>0$，从而$x_2<0$，$x_3<0$成立



(2) 若 $x_1\in\mathbf{R}$，x_2，x_3 是虚数，则 $x_2x_3=x_2\cdot\overline{x_2}=|x_2|^2>0$，故必有 $x_1<0$。同(1)，仍然有 $x_2+x_3<0$，故 $\mathrm{Re}(x_2)=\mathrm{Re}(x_3)=\frac{1}{2}(x_2+x_3)<0$.

由(1)、(2)知充分性成立.

必要性 设 x_1 是实数，另两个 x_2，x_3 是复数。因 $x_1<0$，$x_2+x_3<0$，$x_2x_3>0$，知

$$\frac{a_1}{a_0}=-(x_1+x_2+x_3)>0,$$

$$\frac{a_2}{a_0}=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3>0,$$

$$\frac{a_3}{a_0}=-x_1x_2x_3>0.$$

于是 a_0,a_1,a_2,a_3 同号，且 $\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_0}-\frac{a_3}{a_0}=-(x_2+x_3)[x_1^2+x_1(x_2+x_3)+x_2x_3]>0$，

即 $a_1a_2-a_0a_3>0$，必要性得证.

例6 设 α 是复系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq0)$ 的一个根，

(1) 求证：$|\alpha|\leqslant1+\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$；

(2) 若 $|a_k|\leqslant1(k=1,2,\cdots,n)$，则 $|\alpha|>\frac{|a_0|}{1+|a_0|}$.

证明 (1) 设 $M=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$，当 $|\alpha|\leqslant1$ 时，结论显然成立.

当 $|\alpha|>1$ 时，由 $f(\alpha)=0$，即 $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0=0$ ①

及 $a_n\neq0$，得 $|\alpha|^n=\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}\alpha+\frac{a_0}{a_n}\right|$

$$\leqslant M(|\alpha|^{n-1}+\cdots+|\alpha|+1)$$

$$=M\cdot\frac{|\alpha|^n-1}{|\alpha|-1}<M\cdot\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|-1}.$$

所以 $|\alpha|<1+M$.

(2)由①式，及 $|a_k|\leqslant1(k=1,2,\cdots,n)$，得

$$|a_0|=|a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_n\alpha^n|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_k\alpha^k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha|^k,$$

若 $|\alpha|\leqslant r=\frac{|a_0|}{1+|a_0|}$，则 $1+|a_0|\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}|\alpha|^k\leqslant\sum\limits_{k=0}^{n}r^k=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}<\frac{1}{1-r}=1+|a_0|$，矛盾. 故 $|\alpha|>r$.

例7 实系数多项式 $p(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 中，对任意的一个根



a，有$\frac{1}{a}$，$1-a$也都是$p(x)$的根．求$p(x)$．

分析 $p(x)$是5次多项式，其根最多有5个．由题设，若$p(a)=0$，则$p\left(\frac{1}{a}\right)=0$，$p(1-a)=0$，且当$a\neq 1$时，又有$p\left(\frac{1}{1-a}\right)=0$，$p\left(1-\frac{1}{a}\right)=0$及$p\left(1-\frac{1}{1-a}\right)=0$．故当$a\neq 1$时，$a$，$\frac{1}{a}$，$1-a$，$\frac{1}{1-a}$，$1-\frac{1}{a}$，$1-\frac{1}{1-a}$都是$p(x)$的根，从中必可求出$a$的值．

解 由题设，若a是$p(x)=0$的一个根，且当$a\neq 1$时，$\frac{1}{a}$，$1-a$，$\frac{1}{1-a}$，$1-\frac{1}{a}$，$1-\frac{1}{1-a}$也都是$p(x)$的根．而$p(x)$是5次多项式，最多有5个根，所以这6个根中必存在相同的值．

不妨令$a=\frac{1}{a}$，或$a=1-a$，或$a=\frac{1}{1-a}$，或$a=1-\frac{1}{a}$，或$a=1-\frac{1}{1-a}$，则a可取-1，$\frac{1}{2}$，2，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$中的一个．由此可知

$$p(x)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)(x^2-x+1)，$$

$$p(x)=(x+1)^3\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)，$$

$$p(x)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3(x-2)，$$

$$p(x)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)^3，$$

$$p(x)=(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-2)，$$

$$p(x)=(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-2)^2，$$

$$p(x)=(x+1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)^2，$$

都为所求．

特别地，当$a=1$时，$p(x)=(x-1)^5$也为所求．

例8 设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是实系数多项式．求证：

(1) 若$a_n>a_{n-1}>\cdots>a_0>0$，则$f(x)$的根在单位圆内，即它们的模小于1；

(2) 若$0<a_n<a_{n-1}<\cdots<a_0$，则$f(x)$的根在单位圆外，即它们的模大于1．

分析 若令$x=\frac{1}{y}$，则从其中一个结论可以推出另一个结论，因此只需证明其中的



一个.

证明 若令 $x=\frac{1}{y}$，则从其中一个结论可以推出另一个结论，因此我们只需证明其中的一个. 下证(2).

因为 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$，令 $b_0=a_0$，$b_k=a_k-a_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$，

则 $b_k>0$，且 $a_k=b_0+b_1+\cdots+b_k(k=0,1,\cdots,n)$. 于是

$f(x)=b_0x^n+(b_0+b_1)x^{n-1}+\cdots+(b_0+\cdots+b_j)x^{n-j}+\cdots+(b_0+b_1+\cdots+b_n)$

$=b_0(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)+b_1(x^{n-1}+\cdots+1)+\cdots+b_j(x^{n-j}+\cdots+1)+\cdots+b_n$

$=\sum\limits_{j=0}^{n}b_j(x^{n-j}+\cdots+1)=\frac{1}{1-x}\sum\limits_{j=0}^{n}b_j(1-x^{n-j+1})$.

若 r 是 $f(x)$ 的根(显然 $r\neq 1$)，那么 $\sum\limits_{j=0}^{n}b_j(1-r^{n-j+1})=0$，即

$$\sum_{j=0}^{n}b_j=\sum_{j=0}^{n}b_jr^{n-j+1} \qquad ①$$

下证 $|r|>1$. 若不然，当 $|r|<1$ 时，有 $\left|\sum\limits_{j=0}^{n}b_jr^{n-j+1}\right|\leqslant\sum\limits_{j=0}^{n}b_j|r|^{n-j+1}<\sum\limits_{j=0}^{n}b_j$，

这与①式矛盾.

当 $|r|=1$ 时，令 $r=\cos\theta+i\sin\theta$，于是有 $\sum\limits_{j=0}^{n}b_j=\sum\limits_{j=0}^{n}b_j\cos(n-j+1)\theta$.

要使上式成立，必有所有的 $\cos(n-j+1)\theta=1$，$j=0,1,\cdots,n$. 即 $\theta=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. 从而 $r=1$，这不可能. 所以，$|r|>1$. 这就证得了(2).

例9 考虑复平面上的正方形，它的四个顶点对应的复数恰好是某个整系数一元四次方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的四个根，求这种正方形面积的最小值.

分析 将复平面的原点平移至正方形的中心后，该正方形的顶点均匀分布在一个圆周上，故在原复平面内，它们对应的复数是方程 $(x-a)^4=b$ 的解，其中 $a,b\in\mathbf{C}$，展开，通过对比系数求解.

解 由题设，正方形的四个顶点对应的复数是方程 $(x-a)^4=b(a,b\in\mathbf{C})$ 的四个根，于是 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=(x-a)^4-b=x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4-b$.

通过对比系数，可知 $a=-\frac{p}{4}$ 是有理数，再结合 $-4a^3=r$ 是整数，知 a 是整数. 于是，由 $s=a^4-b$ 是整数，可知 b 亦是整数.

以上的讨论表明，正方形的顶点对应的复数是整系数方程 $(x-a)^4=b$ 的根，其外接圆半径 $\sqrt[4]{|b|}$ 不小于1，于是，正方形的面积不小于 $(\sqrt{2})^2=2$. 而方程 $x^4=1$ 的四个根在复平面上对应于一个正方形的顶点，故知所求正方形面积的最小值是2.



评注　本题的一般情形是：如果一个正 n 边形的顶点对应的复数是某个整系数方程 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 的 n 个根，那么该正 n 边形面积的最小值是 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

例 10　试求所有满足下列条件的实系数多项式 $f(x)$：

(1) $f(x)=a_0x^{2n}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}x^2+a_{2n}$，$a_0>0$；

(2) $\sum\limits_{j=0}^{n}a_{2j}a_{2n-2j}\leqslant C_{2n}^{n}a_0a_{2n}$；

(3) $f(x)$ 的 $2n$ 个根都是纯虚数.

分析　设 $\pm i\beta_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 为 $f(x)$ 的 $2n$ 个根，则 $f(x)=a_0\prod\limits_{j=1}^{n}(x-i\beta_j)(x+i\beta_j)=a_0\prod\limits_{j=1}^{n}(x^2+\beta_j^2)$，通过对比系数求解.

解　设 $\pm i\beta_j$ 为 $f(x)$ 的 $2n$ 个根（不妨设 $\beta_j>0$，$1\leqslant j\leqslant n$），则

$$f(x)=a_0\prod_{j=1}^{n}(x-i\beta_j)(x+i\beta_j)=a_0\prod_{j=1}^{n}(x^2+\beta_j^2).$$

比较 $f(x)$ 两边的系数，有 $a_{2k}=a_0\sum\limits_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n}\beta_{j_1}^2\beta_{j_2}^2\cdots\beta_{j_k}^2$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，

其中 $a_{2n}=a_0\prod\limits_{j=1}^{n}\beta_j^2$. 记 $\pi=\prod\limits_{j=1}^{n}\beta_j^2$，则

$$C_{2n}^{n}a_0a_{2n}\geqslant\sum_{j=0}^{n}a_{2j}a_{2n-2j}=\sum_{j=1}^{n-1}a_{2j}a_{2n-2j}+2a_0a_{2n}$$

$$=a_0^2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_j\leqslant n}\beta_{i_1}^2\cdots\beta_{i_j}^2\Big)\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-j}\leqslant n}\beta_{i_1}^2\cdots\beta_{i_{n-j}}^2\Big)+2a_0a_{2n}$$

$$\geqslant a_0^2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(C_n^j\Big(\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_j\leqslant n}\beta_{i_1}^2\cdots\beta_{i_j}^2\Big)^{\frac{1}{C_n^j}}\Big)\Big(C_n^{n-j}\Big(\prod_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{n-j}\leqslant n}\beta_{i_1}^2\cdots\beta_{i_{n-j}}^2\Big)^{\frac{1}{C_n^{n-j}}}\Big)+2a_0a_{2n}$$（利用均值不等式）

$$=a_0^2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(C_n^j\cdot\pi^{\frac{C_{n-1}^{j-1}}{C_n^j}}\Big)\Big(C_n^{n-j}\cdot\pi^{\frac{C_{n-1}^{n-j-1}}{C_n^{n-j}}}\Big)+2a_0a_{2n}$$

$$=a_0^2\pi\sum_{j=1}^{n-1}C_n^j\cdot C_n^{n-j}+2a_0^2\pi=a_0^2\pi\sum_{j=0}^{n}C_n^j\cdot C_n^{n-j}=C_{2n}^{n}a_0a_{2n}.$$

这里，利用了 $\sum\limits_{j=0}^{n}C_n^jC_n^{n-j}=C_{2n}^{n}$. 事实上，比较 $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ 中两边 x^n 的系数即得.

故上式等号恰好取到. 而利用均值不等式时，等号成立当且仅当 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n$. 故



$f(x)=a_0(x^2+\beta^2)^n(\beta>0,a_0>0)$.

易验证，这样的多项式 $f(x)=a_0(x^2+\beta^2)^n(\beta>0,a_0>0)$ 满足题设的全部条件.



思考交流

思考题 已知复数 z 满足方程 $11z^{10}+10iz^9+10iz-11=0$，求证 $|z|=1$.

证明 将已知复数方程变形为 $z^9=\frac{11-10iz}{11z+10i}$，需证 $|z|=1$，只要证明 $\left|\frac{11-10iz}{11z+10i}\right|=1$. 用反证法 设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则

$$|z|^9=\left|\frac{11-10iz}{11z+10i}\right|=\sqrt{\frac{121+220b+100(a^2+b^2)}{121(a^2+b^2)+220b+100}}.$$

记 $f(a,b)=121+220b+100(a^2+b^2)$，$g(a,b)=121(a^2+b^2)+220b+100$. 若 $a^2+b^2>1$，则 $f(a,b)<g(a,b)$，即 $|z|^9<1$，有 $|z|<1$，$a^2+b^2<1$，产生矛盾.

若 $a^2+b^2<1$，则 $f(a,b)>g(a,b)$，即 $|z|^9>1$，有 $|z|>1$，$a^2+b^2>1$，也产生矛盾. 从而只能有 $a^2+b^2=1$，故 $|z|=1$.

同步检测3

一、选择题

1. $p^2\geq 4q$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+px+q=0$ 有实根的 ( )

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分且必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

2. 设方程 $x^2-\sqrt{2}x+m=0$ 的两个虚根为 α,β，且 $|\alpha-\beta|=3$，则实数 m 的值为 ( )

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{17}{4}$　　D. $\frac{17}{4}$

3. 当 $n\in\mathbf{N}$ 时，方程 $(x+1)^{2n}+(x-1)^{2n}=0$ 的根的情况为 ( )

A. 都是实根　　B. 都是纯虚数根

C. 有实根，也有虚根　　D. 不能确定

4. n 为任意正偶数，复数 z_0 是方程 $1+z+z^2+\cdots+z^n=0$ 的一个根，则 ( )

A. z_0 可能是 1　　B. z_0 可能是 -1



C. z_1 必为虚数　　　　　　　　D. z 不一定是虚数

5. 设 $w = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$，则以 w, w^3, w^7, w^9 为根的方程是　　(　　)

A. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$　　　　B. $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$

C. $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$　　　　D. $x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

6. 方程 $x^{\ } = 1$ 的根在复平面上对应的点的集合为 M，以 M 中的点为顶点的三角形中，不同的直角三角形的个数是　　(　　)

A. 120 个　　B. 80 个　　C. 40 个　　D. 680 个

二、填空题

7. 关于 x 的方程 $x^2 + mx + 1 + 2i = 0$ 有实数根，则复数 m 的模的最小值为______.

8. 设 ε 为方程 $x^{\ } = 1$ 的一个虚根，则 $\varepsilon(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^{\ })$ ______.

9. 若实系数方程 $2x^4 + ax^3 - 9x^2 + ax + 2 = 0$ 的四个根都是虚数，并且模均不为 1，则 a 的取值范围是______.

10. 已知 b, c 均为整数，且 $c < 2000$，若关于 x 的二次方程 $x^2 - bx + c = 0$ 的两个根的实部均大于 1，则所有 (b, c) 对的个数是______.

11. 设 x_1, x_2 是实系数一元二次方程 $ax^2 - bx - c = 0$ 的两个根，若 x_1 是虚数，$\frac{x_1^2}{x_2}$ 是实数，则 $S = 1 + \frac{x_1}{x_2} + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2^{\ }}$ 的值为______.

12. 实系数多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足 $(1+ix)^{20\ } = f(x) + ig(x)$，则 $f(x)$ 的系数之和为______.

三、解答题

13. 解方程 $z^n = (\bar{z})^m (m, n \in \mathbf{N}^*)$.

14. 关于 x 的二次方程 $x^2 + z_1 x + z_2 + m = 0$ 中，z_1, z_2, m 均为复数，且 $z_1^2 - 4z_2 = 16 + 20i$，设这个方程的两个根为 α, β，且 α, β 满足 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7}$，求 $|m|$ 的最大值与最小值.

15. 设 $n \in \mathbf{N}^*$，求证：方程 $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ 有模为 1 的复根的充要条件是 $n+2$ 可被 6 整除.

16. 已知复平面内 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 对应的复数分别为 $3+2i, 3i, 2-i$，动点 P 对应的复数是 z，若关于 z 的方程 $|z|^2 + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \beta = 0$ 表示 $\triangle ABC$ 的外接圆，求复数 α, β.

17. 如果复数 $|w| = 1$，求证：方程 $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = w (n \in \mathbf{N}^*)$ 的所有根都是不相等的

实数

18. 设实系数方程 $x^3 - x^2 - ax - b = 0$ 有三个正实根，求证：方程 $x^3 - x^2 + bx + a = 0$ 必有一个正实根和两个互为共轭的虚根.

19. 设 a、b、c 为实数，方程 $x^2 - (a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$ 有一个形如 $\alpha + \beta i$（$\alpha > 0$，$\beta \neq 0$，$\beta \in \mathbf{R}$）的虚根，求证：

(1) a、b、c 都是正实数；

(2) 存在一个以 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 为边长的三角形.

20. 设方程 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的系数都是实数，且适合条件：$0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant 1$. 已知 λ 为此方程的复根，且适合条件 $|\lambda| \geqslant 1$，试求证 $\lambda^{n+1} = 1$.





第 讲　单位根及其应用

知识点金

1的每一个$n(n\in\mathbf{N}^*)$次方根，称为n次单位根或简称为单位根. 记这n个单位根为$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$，其中$\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k=\varepsilon_1^k$，这里$k=1,2,\cdots,n-1$. 于是，全部$n$次单位根又可表示为$1,\varepsilon_1,\varepsilon_1^2,\cdots,\varepsilon_1^{n-1}$. 特别地，把3次单位根记作$1,\omega,\omega^2$，其中$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

当n为奇数时，除1以外，其余的n次单位根都是虚数；当n为偶数时，除±1外，其余的单位根都是虚数，并且n个单位根在复平面上对应于一个内接于单位圆的正n边形的顶点. 由于$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$，所以

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})$$
$$=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_1^2)\cdots(x-\varepsilon_1^{n-1})$$

一般地，对任意的$k\in\mathbf{Z}$，我们记$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$，则由三角函数的周期性可知$\varepsilon_k=\varepsilon_r$，这里$r\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，且$k\equiv r\pmod n$. 这样，易知$n$次单位根有如下性质：

(1) 两个n次单位根$\varepsilon_j,\varepsilon_k$的乘积仍是一个$n$次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k=\varepsilon_{j+k}$，这里$j,k$是任意整数.

(2) 对任意整数m，有$\varepsilon_1^m=\varepsilon_m$.

(3) 设m是整数，且$n\in\mathbf{N}^*$，$n\neq1$，则$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}n & (n\mid m)\\ 0 & (n\nmid m)\end{cases}$ 特别地，$1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}=0$.





例题精析

例1 设有 $n(n\geq 2)$ 个相异的复数构成一个集合 S，这个集合中任意两个数(可以相同)的积仍然属于这个集合。试求此集合中的 n 个元素。

分析 由于此集合中的元素对乘法封闭，于是联想到单位根，利用单位根的知识求解。

解 分两种情形讨论：

(1) 若集合 S 中不含零，设它的 n 个元素为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$. ①

任取 $z\in S$，则 $z\neq 0$，作乘积 $za_1,za_2,\cdots,za_n$. ②

由于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同及 $z\neq 0$，所以②中的 n 个复数也互不相同，于是由题设，②与①对应的 n 个复数相同，故 $a_1a_2\cdots a_n=za_1\cdot za_2\cdots za_n$，从而 $z^n=1$。又1恰有 n 个互不相等的 n 次单位根，故 S 由1的 n 个 n 次单位根构成，这 n 个根是 $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$。

(2) 若集合 S 中含0，由(1)知，S 中除0外，剩下的 $n-1$ 个元素恰为1的 $n-1$ 个 $n-1$ 次单位根，即 S 的 n 个元素为0及 $\cos\frac{2k\pi}{n-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n-1}(k=0,1,\cdots,n-2)$。

例2 设 m,n 为正整数，$f(x)=x^{3m+1}+x^{3n+2}+1$，求证：$x^2+x+1\mid f(x)$。

分析 注意到 $x^2+x+1=(x-w)(x-w^2)$，其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，若 $f(x)$ 能被 x^2+x+1 整除，则必有 $f(w)=0$，$f(w^2)=0$，反之亦成立，故只需验证 $f(w)$ 与 $f(w^2)$ 即可。

证明 因为 $x^2+x+1=(x-w)(x-w^2)$，其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $w^3=1$，且

$$f(w)=w^{3m+1}+w^{3n+2}+1=w+w^2+1=0,$$
$$f(w^2)=(w^2)^{3m+1}+(w^2)^{3n+2}+1=w^2+w+1=0.$$

于是 $(x-w)(x-w^2)\mid f(x)$，即 $x^2+x+1\mid f(x)$。

例3 求 $f(x)=x^{1000}-1$ 除以 $p(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$ 的余式。

分析 设余式为 $r(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则 $f(x)=p(x)\cdot q(x)+r(x)$，考虑 $p(x)$ 的根即可求得 $r(x)$。

解 设余式为 $r(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，对 $p(x)$ 作因式分解，有 $p(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)$，所以 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)q(x)+r(x)$ ①



在①中分别令 $x=1$ 及 $\omega\left(\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$，因 $p(1)=p(\omega)=0$，故有

$$f(1)=r(1),\ f(\omega)=r(\omega) \qquad ②$$

而 $f(1)=1^{200}-1=0$，$r(1)=a+b+c+d$，

$$f(\omega)=\omega^{200}-1=\omega^2-1=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$r(\omega)=a+b\omega^2+c\omega+d=a+d-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(c-b)i$$

$$d-b=-1$$

$$c-a=1$$

将它们代入②式，且由复数相等的充要条件得 $a+d-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}=-\frac{3}{2}$，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(c-b)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得 $a=-1$，$b=1$，$c=d=0$，故所求余式为 $-x^3+x^2$.

例4 在整数范围内分解因式 x^5+x+1.

分析 记 $f(x)=x^5+x+1$，ω 是1的任意3次单位虚根，由 $f(\omega)=\omega^5+\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$，知 $f(x)$ 必有一个二次因式 x^2+x+1，由此，再用拆项法或长除法均能完成因式分解.

解 用拆项法，有 $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1$

$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

评注 显然 x^2+x+1 在整数范围内不能再分解，而对于 x^3-x^2+1 在整数范围内能否再分解，需要用到一个关于有理根的定理：若既约分数 $\frac{q}{p}$ 是整系数多项式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的根，则 $p\mid a_n$，且 $q\mid a_0$. 特别地，当 $a_n=1$ 时，$p(x)$ 的有理根必为整数，且是 a_0 的约数.

现设 $g(x)=x^3-x^2+1$ 在整数范围内还能分解，则 $g(x)$ 必有一个整数根，且是1的约数，但 $g(\pm1)\neq0$，故 $g(x)$ 在整数范围内不能再分解.

例5 计算 $\sec\frac{2\pi}{9}+\sec\frac{4\pi}{9}+\sec\frac{6\pi}{9}+\sec\frac{8\pi}{9}$.

分析 若 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$n\in\mathbf{N}^*$，则

$\cos n\theta=\mathrm{Re}(z^n)=\frac{1}{2}(z^n+\bar{z}^n)=\frac{1}{2z^n}(z^{2n}+1)$,

$\sin n\theta=\mathrm{Im}(z^n)=\frac{1}{2i}(z^n-\bar{z}^n)=\frac{1}{2iz^n}(z^{2n}-1)$.



由此，将三角问题转化为复数问题，并利用单位根的性质求解.

解 设 $z=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}$，则 $z^9=1$，且 $z^8+z^7+\cdots+z+1=0$.

而
$$M=\sec\frac{2\pi}{9}+\sec\frac{4\pi}{9}+\sec\frac{6\pi}{9}+\sec\frac{8\pi}{9}$$
$$=\frac{2z}{z^2+1}+\frac{2z^2}{z^4+1}+\frac{2z^3}{z^6+1}+\frac{2z^4}{z^8+1}$$
$$=2z\left(\frac{1}{z^2+1}+\frac{z}{z^4+1}+\frac{z^2}{z^6+1}+\frac{z^3}{z^8+1}\right)$$

由于 $(z^4+1)(z^6+1)(z^8+1)=(z+z^6+z^4+1)(z^8+1)$

$=2+z+z^3+z^4+z^5+z^6+z^8=1-z^2-z^7$,

$z(z^2+1)(z^6+1)(z^8+1)=2+z+z^2+z^3+z^6+z^7+z^8=1-z^4-z^5$,

$z^2(z^2+1)(z^4+1)(z^8+1)=z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8=-1$,

$z^3(z^2+1)(z^4+1)(z^6+1)=2+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7=1-z-z^8$,

$(z^2+1)(z^4+1)(z^6+1)(z^8+1)=2+2z+2z^2+2z^3+z^4+2z^5+2z^6+z^7+2z^8$
$=-z^4-z^7$,

故 $M=\frac{2z(3+z^3+z^6)}{-z^4-z^7}$. 又 $z^3+z^6=-1$，所以 $M=\frac{2z\cdot(3-1)}{-z\cdot(-1)}=4$.

评注 某些较难的三角求值问题可转化成相应的复数(单位根)问题，避免繁杂而技巧的三角变换.

例6 对于 $n\in N^*$，$n\geq 2$，求证下列恒等式：

(1) $\prod_{k=1}^{n-1}\left|\cos\frac{k\pi}{n}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n[1-(-1)^n]$；

(2) $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

分析 令 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则 $1+\varepsilon^k=2\cos\frac{k\pi}{n}e^{\frac{k\pi i}{n}}$，$1-\varepsilon^k=-2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{\frac{k\pi i}{n}}$，

$k=1,2,\cdots,n-1$. 再由恒等式 $1+x+\cdots+x^{n-1}=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$，赋特殊值($x=\pm1$)即可获证.

证明 (1) 令 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则对任意复数 x 有恒等式 $1+x+\cdots+x^{n-1}=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$. ①

在①式中令 $x=-1$，得 $(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\cdots(1+\varepsilon^{n-1})=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]$.

又 $1+\varepsilon^k=2\cos\frac{k\pi}{n}e^{\frac{k\pi i}{n}}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，所以 $2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]e^{-\frac{n-1}{2}\pi i}$，



两边取模，整理，得 $\prod_{k=1}^{n-1}\left|\cos\frac{k\pi}{n}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left|1-(-1)^{n}\right|$.

(2) 在①式中令 $x=1$，得 $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^{2})\cdots(1-\varepsilon^{n-1})=n$.

又 $1-\varepsilon^{k}=-2i\sin\frac{k\pi}{n}e^{\frac{k\pi}{n}i}$，$k=1,2,\cdots,n-1$，所以 $(-2i)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n\cdot e^{-\frac{n-1}{2}\pi i}$.

两边取模，整理，得 $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

评注 利用本题结论及三角恒等式 $\cos\frac{k\pi}{n}=-\cos\frac{n-k}{n}\pi$，$\sin\frac{k\pi}{n}=\sin\frac{n-k}{n}\pi$，易得

$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$，$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$，$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^{n}}$.

例7 设正整数 $n(n\geq 2)$ 不是 2 的整数次幂，求证：存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 a_1，$a_2,\cdots,a_n$，使 $\sum_{k=1}^{n}a_k\cos\frac{2k\pi}{n}=0$.

分析 记 $S=\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\frac{2k\pi}{n}i}$，则等价证明存在 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使 $\mathrm{Re}(S)=0$.

再利用 $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$ 证明.

证明 当 n 为大于 1 的奇数时，构造排列：$1,2,\cdots,\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2},\frac{n+5}{2},\cdots,n,\frac{n+1}{2}$ 满足

$a_n=\frac{n+1}{2}$，$a_k+a_{n-k}=n+1(k=1,2,\cdots,n-1)$.

记 $S=\sum_{k=1}^{n}a_ke^{\frac{2k\pi}{n}i}$，则 $S=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}e^{\frac{2(n-k)\pi}{n}i}+a_ne^{\frac{2n\pi}{n}i}=\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}e^{-\frac{2k\pi}{n}i}+a_n$

所以 $2\mathrm{Re}(S)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_ke^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)+\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n-1}a_{n-k}e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)+2a_n$

$=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(a_k+a_{n-k})e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)+(n+1)$

$=(n+1)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(e^{\frac{2k\pi}{n}i}\right)=0$

故 $\mathrm{Re}(S)=0$，得证.

下面证明：若结论对 $m\in\mathbf{N}^*$ 成立，则对 $n=2m$ 亦成立.

假设存在 $1,2,\cdots,m$ 的排列 $b_1,b_2,\cdots,b_m$，使 $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}b_ke^{\frac{2k\pi}{m}i}\right)=0$

又 $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}(2k-1)e^{\frac{(2k-1)\pi i}{m}}\right)$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}(2m-2k+1)e^{\frac{(2m-2k+1)\pi i}{m}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}(2m-2k+1)e^{\frac{(2k-1)\pi i}{m}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}[(2k-1)+(2m-2k+1)]e^{\frac{(2k-1)\pi i}{m}}\right) = m\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}e^{\frac{(2k-1)\pi i}{m}}\right)=0,$$

即 $\quad \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}(2k-1)e^{\frac{(2k-1)\pi i}{m}}\right)=0$.

构造 $1,2,\cdots,2m$ 的排列为 $1,2b_1,3,2b_2,\cdots,2m-1,2b_m$，则

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k e^{\frac{k\pi i}{m}}\right)=2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}b_k e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)+\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{m}(2k-1)e^{\frac{(2k-1)\pi i}{m}}\right)=0,$$

即 $n=2m$ 时结论成立.

综上所述，结论成立.

例 8 定义数列 $\{a_n\}$：a_1，a_2 是方程 $z^2+iz-1=0$ 的两个根，且当 $n\geqslant 2$ 时，有
$(a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2)+i(a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n)=0$.

求证：对一切正整数 n，有 $a_n^2+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2=a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}a_n$.

分析 由递推式入手研究，求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，再进行证明.

证明 由方程 $z^2+iz-1=0$，可解得 $z=\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\cdot i=iw$ 或 iw^2，

其中 $w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

不妨设 $a_1=iw^2$，$a_2=iw$，由已知递推关系得

$a_n^2+2ia_n+i^2=a_{n+1}a_{n-1}+i(a_{n+1}+a_{n-1})+i^2$，

即 $\quad (a_n+i)^2=(a_{n+1}+i)(a_{n-1}+i)$. ①

显然 $a_n+i\neq 0(n\in\mathbf{N}^*)$，否则，若存在某个 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_n+i=0$，则由①得 $a_{n-1}+i=0$，继续下去，有 $a_1+i=0$，这与 $a_1=iw^2$ 矛盾. 于是，数列 $\{a_n+i\}$ 是等比数列，且首项为 $a_1+i=i(w^2+1)$，公比为 $\frac{a_2+i}{a_1+i}=\frac{iw+i}{iw^2+i}=w$. 所以 $a_n+i=i(w^2+1)\cdot w^{n-1}=-iw^n$，故 $a_n=-i-iw^n$.

因为 $w^3=1$，所以 $a_{n+3}=a_n(n\geqslant 1)$，这说明数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的周期数列. 又 $a_3=-2i$，所以，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，有

$a_n^2+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2=-w^4-w^2-4=-(w+w^2)-4=-3$，

$a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}a_n=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$

$=i^2w^3-2i^2w-2i^2w^2=-1+2w+2w^2=-3$.

从而 $a_n^2+a_{n+1}^2+a_{n+2}^2=a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}a_n$.

例9 在复平面上任给 $n-1$ 个点 $P_k(k=1,2,\cdots,n-1)$. 求证：一定可以在单位圆 O 上找到一个点 A，使 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}|AP_k|\geqslant 1$.

分析 全部 $n(n\geqslant 2)$ 次单位根正好把复平面上的单位圆 n 等分，即 $\varepsilon_0=1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是以原点为圆心，1 为半径的圆的内接 n 边形的 n 个顶点，那么，这 n 个点中一定有一个可以作为题中的 A 点.

证明 令 $A_m=\varepsilon_m(m=0,1,2,\cdots,n-1)$. 下面证明：点 $A_0,A_1,A_2,\cdots,A_{n-1}$ 中至少有一点可作为 A 点，使 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}|AP_k|\geqslant 1$.

若对所有 $A_m(m=0,1,2,\cdots,n-1)$，有 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}|A_mP_k|<1$. 令点 P_k 所对应的复数为 z_k，记多项式 $(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})=z^{n-1}+a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$，则

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1}|A_mP_k|&=\prod_{k=1}^{n-1}|\varepsilon_m-z_k|\\&=|\varepsilon_m^{n-1}+a_1\varepsilon_m^{n-2}+\cdots+a_{n-1}|\\&=|\varepsilon_m^{n-1}+a_1\varepsilon_m^{n-2}+\cdots+a_{n-1}|\cdot|\varepsilon_m|\\&=|1+a_1\varepsilon_m^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_m|.\end{aligned}$$

由 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}|A_mP_k|<1$，得 $|1+a_1\varepsilon_m^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_m|<1,m=0,1,\cdots,n-1$.

将上面的 n 个不等式相加，并利用复数模不等式，得

$$n>\sum_{m=0}^{n-1}|1+a_1\varepsilon_m^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_m|\geqslant\left|n+a_1\sum_{m=0}^{n-1}\varepsilon_m^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\varepsilon_m\right|=n.$$

这就导致了矛盾. 故 $A_0,A_1,\cdots,A_{n-1}$ 中至少有一点可作 A 点，使 $\prod\limits_{k=1}^{n-1}|AP_k|\geqslant 1$ 成立.

例10 设 n 为大于 2 的正整数，函数 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 满足：对于任意的正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，均有 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(A_i)=0$. 求证：$f\equiv 0$.

证明 将 R^2 视为复平面，我们要证明：对任意的 $z\in C$，均有 $f(z)=0$.

对任意的 $z_0\in C$，作一个正 n 边形 $A_0A_1\cdots A_{n-1}$（其中 A_0 对应复数 z_0），记 A_k 对应复数 $z_k,k=1,2,\cdots,n-1$. 令 $z_{j,k}=z_0+(z_j-z_0)e^{\frac{2k\pi i}{n}}(0\leqslant k\leqslant n-1,0\leqslant j\leqslant n-1)$.

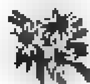
则对任意的 k，复数 $z_{0,k}, z_{1,k}, \cdots, z_{n-1,k}$ 对应的点是一个正 n 边形的顶点（相当于将 $A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ 逆时针方向旋转 $\frac{2k\pi}{n}$）；而对任意的 j，当 $j=0$ 时，$z_{0,0}=z_{0,1}=\cdots=z_{0,n-1}=z_0$，当 $1\leqslant j\leqslant n-1$ 时，$z_{j,0}, z_{j,1}, \cdots, z_{j,n-1}$ 对应的点形成一个以 z_0 为中心的正 n 边形。

依题中条件以及上述讨论，可知和式 $S=\sum\limits_{0\leqslant j,k\leqslant n-1} f(z_{j,k})$，

一方面满足 $S=\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(z_{j,k}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(z_{0,k}) + \sum\limits_{j=1}^{n-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(z_{j,k}) = nf(z_0)$，

另一方面满足 $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\sum\limits_{j=0}^{n-1} f(z_{j,k})\right) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}0=0$。

所以，有 $nf(z_0)=0$，即 $f(z_0)=0$。利用 z_0 的任意性，可知 $f\equiv 0$。



思考交流

思考题1 设 z 是1的7次方根，$z\neq 1$，求 $z+z^2+z^4$ 的值。

解 设 $u=z+z^2+z^4$，$v=z^3+z^5+z^6$。由 $z^7=1$，$z\neq 1$ 有

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{1-z^7}{1-z}=0,$$

所以 $u+v=-1$。

又 $(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3=2$，

即 $uv=2$。于是 u,v 是方程 $x^2+x+2=0$ 的根。从而 $u=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$，即 $z+z^2+z^4$ 的值为 $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$。

思考题2 设非零复数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 满足

$$\begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4} \\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}\right)=S\end{cases}$$

其中 S 为实数且 $|S|\leqslant 2$。求证：复数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 在复平面上对应的点位于同一圆周上。

证明 令 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{a_5}{a_4}=q$，则由题意得



$$a_1(1+q+q^2+q^3+q^4)=\frac{4}{a_1q^4}(1+q+q^2+q^3+q^4)$$

(1) 若 $1+q+q^2+q^3+q^4=0$，则 $q^5-1=0$，即 $q^5=1$，得 $|q|=1$，此时 $|a_1|=|a_2|=|a_3|=|a_4|=|a_5|$，故复数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 对应的点都在以原点为圆心、$|a_1|$ 为半径的圆周上。

(2) 若 $1+q+q^2+q^3+q^4\neq0$，则 $a_1^2q^4=4$，即 $a_3^2=4$，$a_3=\pm2$，而 q 满足方程

$$1+q+\frac{1}{q}+q^2+\frac{1}{q^2}=\frac{S}{a_3}=\pm\frac{S}{2} \quad ①$$

令 $x=q+\frac{1}{q}$，上式化为关于 x 的实系数二次方程 $x^2+x-1\mp\frac{S}{2}=0$ ②

令 $f(x)=x^2+x-1\mp\frac{S}{2}$，由于 $|S|\leqslant2$，所以

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}(5\pm2S)<0$，$f(2)=5\mp\frac{S}{2}>0$，$f(-2)=1\mp\frac{S}{2}\geqslant0$，

故方程②的两根都是绝对值不大于2的实数。

而对于②的每个实根 x，相应的 q 满足实系数二次方程 $q^2-xq+1=0$ ③

它的判别式 $\Delta=x^2-4\leqslant0$，故两根 q_1,q_2 为共轭复数，且 $|q_1|^2=|q_2|^2=q_1q_2=1$。

因此，方程①的每个根 q 都满足 $|q|=1$，从而 $|a_1|=|a_2|=|a_3|=|a_4|=|a_5|=2$，即符合结论。

同步检测4

1. (1) 若 $z^2+z+1=0$，求 $z^{[illegible]}+z^{[illegible]}+z^{[illegible]}+z^{[illegible]}$ 的值；

(2) 若虚数 z 满足 $z^3=8$，求 z^3+z^2+2z+2 的值。

2. 集合 $A=\{z\mid z^{18}=1\}$ 与 $B=\{w\mid w^{48}=1\}$ 都是1的复数根的集合，集合 $C=\{zw\mid z\in A,w\in B\}$ 也是一个1的复数根的集合。集合 C 中有多少个不同的元素？

3. 已知 $a^2+a+1=0$，求证：$a^{1996}+\frac{1}{a^{[illegible]}}=a^{[illegible]}+\frac{1}{a^{[illegible]}}$

4. 设 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 及 $S(x)$ 都是多项式，且 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$，求证：$x-1$ 是 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 及 $S(x)$ 的公因式。

5. 把 $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$ 分解成两个因式的乘积。

6. 在实数范围内分解因式 $x^{2m+1}-1(m\in\mathbf{N}^*)$。

7. 求所有的 $m,n\in\mathbf{N}^*$，使得多项式 $f(x)=1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ 能被 $g(x)=1$

$+x+x^2+\cdots+x^m$ 整除.

8. 求证：$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

9. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in C$，且对应的点都在单位圆上，设 $f(z)=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$. 求证：存在复数 z_0，使得 $|z_0|=1$，$|f(z_0)|\geq 2$.

10. 已知 $f(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\cdots+C_{n-1}z+C_n$ 是一个 n 次复系数多项式. 求证：存在复数 z_0，使得 $|z_0|\leq 1$，且 $|f(z_0)|\geq |C_0|+|C_n|$.

11. 求证：$\tan\theta+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)+\tan\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\tan\left(\theta+\frac{n-1}{n}\pi\right)$

$$=\begin{cases}n\tan n\theta, & n\text{ 为奇数}\\ -n\cot n\theta, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

12. 以 S 为顶点的正棱锥的底面是一个正 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ $(n\geq 2)$，Ω 是一个过点 S 的球面. 设 Ω 与棱 SA_i 分别交于点 B_i，$i=1,2,\cdots,2n$. 求证：$\sum_{i=1}^{n}SB_{2i-1}=\sum_{i=1}^{n}SB_{2i}$.

第[illegible]讲　复数与几何

知识点金

复数的几何意义构建了代数与几何之间的相互联系．利用复数研究几何问题的关键在于怎样选取恰当的坐标系，进而建立几何元素的复数表示，并借助复数的运算来探究平面几何问题的解决方案．

1．两点间的距离

复平面上，任意两点 Z_1、Z_2 间的距离为 $|z_1-z_2|$．

2．定比分点公式

设 Z 分有向线段 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 成定比 λ，即 $\frac{z_1-z}{z-z_2}=\lambda(\lambda\neq-1)$，则 $z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ 是定比分点 Z 的复数表示．特别地，当 $\lambda=1$ 时即得中点公式．

依照定比分点公式，易得平面上三点 Z_1、Z_2、Z_3 共线的充要条件是：存在三个不全为零的实数 λ_1，λ_2，λ_3，使得 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0\end{cases}$

推论：若 Z_1，Z_2，Z_3 不共线，且存在实数 λ_1，λ_2，λ_3 满足 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0\end{cases}$，则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$．

3．点到直线的距离

设点 Z 到由点 Z_1、Z_2 决定的直线 l 的距离为 d，则 $d=|z-z_1|\cdot|\sin\varphi|$，这里 φ 为 $\overrightarrow{Z_1Z}$ 到 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 所成的角．注意到

$$\frac{|z-z_1|}{|z_2-z_1|}\sin\varphi=\operatorname{Im}\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)=\frac{\operatorname{Im}(z_1\bar{z}+z_2\bar{z}_1+z\bar{z}_2)}{|z_2-z_1|^2},$$

于是 $d = \frac{1}{|z_2 - z_1|}\mathrm{Im}(\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z + \overline{z} z_1)$ 的绝对值

由此可知，由 Z_1，Z_2，Z 构成的三角形的面积

$$S_{\triangle Z_1 Z_2 Z_3} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_2 z_3 + \overline{z}_3 z_1)\text{ 的绝对值.}$$

4. 两直线的夹角

设 Z_0，Z_1，Z_2 为复平面上的三点，则 $\angle Z_1 Z_0 Z_2 = \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right)$，由此可知，四边形

$Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ 为圆内接四边形的充要条件是 $\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2} = \lambda(\lambda > 0)$

5. 相似

设 $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ 与 $\triangle W_1 W_2 W_3$ 为复平面上的两个三角形，则这两个三角形直接相似的

充要条件是 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$　①

事实上，① 式等价于 $\begin{cases} \left|\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right| = \left|\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right| \\ \arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) = \arg\left(\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}\right) \end{cases}$，

因而 ① 蕴含 $\triangle Z_1 Z_2 Z_3$ 与 $\triangle W_1 W_2 W_3$ 直接相似.

6. 平行与垂直

$Z_1 Z_2 /\!/ Z_3 Z_4$ 的充要条件是 $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = k(k \in \mathbf{R})$

$Z_1 Z_2 \perp Z_3 Z_4$ 的充要条件是 $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = ki(k \in \mathbf{R})$

7. 向量旋转

将向量 $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$ 绕 Z_1 按逆时针方向旋转 θ，再伸缩 r 倍 $(r > 0)$，得向量 $\overrightarrow{Z_1 Z} = \overrightarrow{Z_1 Z_2} \cdot re^{i\theta}$.

特别地，当 $\theta = \frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{2}$ 时，表明向量 $\overrightarrow{Z_1 Z}$ 与 $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$ 所夹的角分别是 $\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$；当 $r = 1$ 时，表示线段 $Z_1 Z$ 与 $Z_1 Z_2$ 相等.



例题精析

例 1　P_1，P_2，…，P_n 是平面上任意给定的 n 个点，试求出一点 A，使得 $AP_1^2 + AP_2^2 + \cdots + AP_n^2$ 为最小.

分析　利用复平面上两点距离公式以及



$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$.

解 设 P_1，P_2，$\cdots$，P_n，A 所对应的复数分别为 z_1，z_2，$\cdots$，z_n，z，则

$$AP_1^2+AP_2^2+\cdots+AP_n^2=\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(z-z_k)(\bar{z}-\bar{z}_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}z\bar{z}-\Big(\sum_{k=1}^{n}z_k\Big)\bar{z}-\Big(\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k\Big)z+\sum_{k=1}^{n}z_k\bar{z}_k$$

$$=n\Big(z-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k\Big)\Big(\bar{z}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k\Big)+\sum_{k=1}^{n}z_k\bar{z}_k-\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}z_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k\Big)$$

$$=n\Big|z-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k\Big|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}z_k\Big|^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}z_k\Big|^2,$$

当且仅当 $z=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k$ 时等号成立.

故当 $z=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k$ 时，$AP_1^2+AP_2^2+\cdots+AP_n^2$ 取得最小值 $\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{n}z_k\Big|^2$.

例2 设△ABC 的顶点对应复数 z_1，z_2，z_3，并且满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. 试用 z_1，z_2，z_3 表示△ABC 的垂心和九点圆的圆心.

分析 设 O、H 分别为△ABC 的外心与垂心，则九点圆（三边的中点、垂足、三角形的三顶点，以及垂心与各顶点连线的中点，这九点共圆）的圆心是 OH 的中点. 由题设，O 为复平面的原点，故只需求 H 对应的复数，利用垂直的充要条件计算.

解 设 O、H 分别为△ABC 的外心与垂心，H 对应的复数为 z，则 $\frac{z-z_1}{z_2-z_3}$，$\frac{z-z_2}{z_3-z_1}$ 都是纯虚数. 于是 $\frac{z-z_1}{z_2-z_3}=-\frac{\bar{z}-\bar{z}_1}{\bar{z}_2-\bar{z}_3}$，$\frac{z-z_2}{z_3-z_1}=-\frac{\bar{z}-\bar{z}_2}{\bar{z}_3-\bar{z}_1}$.

消去 $\bar{z}$，并结合 $z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=z_3\bar{z}_3=1$，可得 $z=z_1+z_2+z_3$.

注意到，△ABC 的九点圆的圆心是 OH 的中点，而 O 为复平面的原点，故九点圆圆心对应的复数为 $\frac{1}{2}(z_1+z_2+z_3)$.

评注 对一般的△ABC，我们还知道，△ABC 的重心 G 对应的复数为 $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$，△ABC 的内心 I 对应的复数为 $\frac{az_1+bz_2+cz_3}{a+b+c}$，这里 a、b、c 为△ABC 的三边长.

例3 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为⊙O 的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为 $\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$，$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆，并确定该圆的圆心.

分析 由上例，若以三角形的外心为原点建立复平面，则其垂心对应的复数即为

顶点对应的复数之和．本题中，四个三角形的外心均为O点，于是以O为原点建立复平面，即得H_1，H_2，H_3，H_4对应的复数，从而获证．

证明 用表示点的字母同时表示该点对应的复数．取⊙O的圆心为原点建立复平面，则由例2的结论知$H_k=(A_1+A_2+A_3+A_4)-A_k$，$k=1,2,3,4$．

设⊙O的半径为r，并记$A=A_1+A_2+A_3+A_4$，则$|H_k-A|=|A_k|=r$，$k=1,2,3,4$，这说明$H_k(k=1,2,3,4)$在以A点为圆心，半径为r的圆周上．证毕．

评注 本题是1992年全国高中数学联赛第二试第一题，标准解答证明十分冗长．由此可见，在复数变换下，许多几何问题甚至都不需要作图，通过复数运算就能看出图形位置的变化特点．

例4 求证：圆内接三角形中，等边三角形的面积最大．

分析 建立适当的复平面，利用三角形面积公式的复数形式计算．

证明 如图3-11所示，以圆心O为原点建立复平面，设圆半径为r，$\overrightarrow{OA}$到$\overrightarrow{OB}$的角为α，$\overrightarrow{OB}$到$\overrightarrow{OC}$的角为β，且不妨设$0<\alpha\le\beta<\pi$，设A，B，C同时也表示该点对应的复数，则$A=r$，$B=re^{i\alpha}$，$C=re^{i(\alpha+\beta)}$，于是

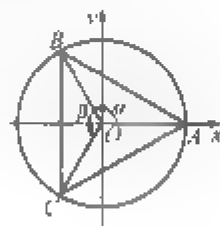


图3-11

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left[r^2e^{i\alpha}+r^2e^{i\beta}+r^2e^{-i(\alpha+\beta)}\right]\right|\\&=\frac{r^2}{2}\left|\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)\right|\\&=r^2\sin\frac{\alpha}{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha+2\beta}{2}\right|\\&\le r^2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right).\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2&=\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^3\\&\le\frac{1}{3}\left[\frac{\left(3-3\cos\frac{\alpha}{2}\right)+3\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{4}\right]^4=\frac{27}{16}.\end{aligned}$$

所以$S_{\triangle ABC}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$，等号成立当且仅当$\begin{cases}3-3\cos\frac{\alpha}{2}=1+\cos\frac{\alpha}{2},\\ \cos\frac{\alpha+2\beta}{2}=-1,\end{cases}$

即$\alpha=\beta=\frac{2\pi}{3}$，此时$\triangle ABC$为等边三角形．

例5 设O是$\triangle ABC$的外接圆圆心，D是边AB的中点，E是$\triangle ACD$的重心，求证：如果$AB=AC$，则$OE\perp CD$．



分析 如图5-2建立复平面. 要证 $OE \perp CD$，只需要证明 $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_O}$ 是纯虚数.

证明 如图5-2所示，以O为原点，过O且平行于BC的直线为实轴建立复平面. 设圆半径为1，$\angle BOx = \theta$. 因为 $AB = AC$，所以

$z_A = i$，

$z_B = \cos\theta - i\sin\theta$，

$z_C = -\cos\theta - i\sin\theta$.

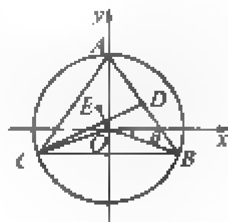


图5-2

于是
$$z_D = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}(1 - \sin\theta)i,$$
$$z_E = \frac{1}{3}(z_A + z_C + z_D) = -\frac{1}{6}\cos\theta + \frac{1}{2}(1 - \sin\theta)i.$$

由于
$$\frac{z_D - z_C}{z_E - z_O} = \frac{\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \sin\theta)i}{-\frac{1}{6}\cos\theta + \frac{1}{2}(1 - \sin\theta)i}$$
$$= \frac{3\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{-\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= -3i\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

是纯虚数，故 $OE \perp CD$.

例6 如图5-3所示，菱形$ABCD$的内切圆O与各边分别切于点E、F、G、H，在$\overset{\frown}{EF}$与$\overset{\frown}{GH}$上分别作$\odot O$的切线交AB于M，交BC于N，交CD于P，交DA于Q. 求证 $MQ \parallel NP$.

分析 要证 $MQ \parallel NP$，只需证明 $\frac{z_Q - z_M}{z_P - z_N}$ 是实数.

证明 如图5-3建立复平面. 设内切圆半径为1，$\angle DOH = \theta$为定值，$\angle DOQ = \theta_1$，$\angle DOM = \pi - \theta_2$，则 $\angle POQ = \theta$，$\angle DOP = \theta - \theta_1$. 同理，$\angle BON = \theta - \theta_2$，则

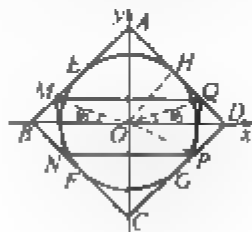


图5-3

$$z_Q = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_1)}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$z_M = \frac{1}{\cos(\theta - \theta_2)}[\cos(\pi - \theta_2) + i\sin(\pi - \theta_2)]$$
$$= \frac{1}{\cos(\theta - \theta_2)}(-\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

$$z_P = \frac{1}{\cos\theta_1}\left[\cos(\theta-\theta_1) + i\sin(\theta-\theta_1)\right],$$

$$z_N = \frac{1}{\cos\theta_2}\left[\cos(\theta-\theta_2) + i\sin(\theta-\theta_2)\right].$$

于是 $z_Q - z_M = \frac{1}{\cos(\theta-\theta_1)\cos(\theta-\theta_2)}\{[\cos\theta_1\cos(\theta-\theta_2) - \cos\theta_2\cos(\theta-\theta_1)]$

$\qquad + i[\sin\theta_1\cos(\theta-\theta_2) - \sin\theta_2\cos(\theta-\theta_1)]\}$,

上式虚部 $= \sin\theta_1\cos\theta\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta\sin\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta\sin\theta_1$

$\qquad = \cos\theta\sin(\theta_1-\theta_2)$,

同理,有

$$z_P - z_N = \frac{1}{\cos\theta_1\cos\theta_2}\{[\cos\theta_2\cos(\theta-\theta_1) - \cos\theta_1\cos(\theta-\theta_2)] + i\cos\theta\sin(\theta_1-\theta_2)\},$$

从而 $\frac{z_Q - z_M}{z_P - z_N} = \frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\cos(\theta-\theta_1)\cos(\theta-\theta_2)} \in \mathbf{R}$,故 $MQ /\!/ NP$.

例7 设 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正向绕行的(顶点 Z_1, Z_2, Z_3 依逆时针方向排列),求证:$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正三角形的充要条件是 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$,其中 ω 是三次单位根 $e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

分析1 利用复数 $1, \omega, \omega^2$ 对应的点为顶点构造正三角形,再利用两个三角形直接相似的充要条件,即得 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正三角形的充要条件.

证明1 我们知道,以 $A(1), B(\omega), C(\omega^2)$ 为顶点的三角形是正三角形,且 $\triangle ABC$ 是正向绕行的. 因此,若 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正向绕行的正三角形,则它与 $\triangle ABC$ 直接相似,于是有 $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 1} = -\omega^2$,即 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$.

反之,若 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$,由于上面的推导是可逆的,反推上去得

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\omega^2 - 1}{\omega - 1},$$

即 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 与 $\triangle ABC$ 直接相似,也就是说 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正向绕行的正三角形.

分析2 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正向绕行的正三角形的充要条件是:将向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 绕 Z_1 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与向量 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 重合. 利用向量旋转证明.

证明2 如图5-4所示,$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正向绕行的正三角形的充要条件是:将向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 绕 Z_1 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后与向量 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 重合. 又 $e^{\frac{\pi}{3}i} = -\omega^2$,于是有 $\overrightarrow{Z_1Z_3} = \overrightarrow{Z_1Z_2}\cdot(-\omega^2)$,即 $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\cdot(-\omega^2)$,化简,得 $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$. 此即 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为正向绕行的正三角形的充要条件.

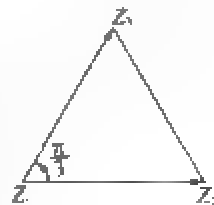


图5-4

评注 利用复数的乘法与除法的几何意义，在解几何问题时，可以方便地处理旋转与伸缩。

例 8 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 30^\circ$，O 是外心，I 是内心，边 AC 上的点 D 与 BC 上的点 E，使得 $AD = BE = AB$。求证：$OI \perp DE$，$OI = DE$。

分析 利用向量旋转，要证 $OI \perp DE$ 且 $OI = DE$，只需证明 $\overrightarrow{DE} = e^{\frac{\pi}{2}i} \cdot \overrightarrow{OI}$ 或 $\overrightarrow{DE} = e^{-\frac{\pi}{2}i} \cdot \overrightarrow{OI}$。

证明 如图 5-5 所示，连结 IA，IB，ID，IE，OA，OB，则 $\angle AOB = 60^\circ$，且 $\triangle AOB$ 为等边三角形。又 I 为内心，且 $AD = AB = BE$，所以 $\triangle DAI \cong \triangle BAI \cong \triangle BEI$。

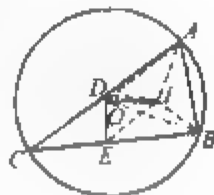


图 5-5

从而 $\angle EIB = \angle DIA = \angle AIB = \frac{1}{2}(180^\circ + \angle C) = 105^\circ$，$ID = IB$，$IE = IA$。

以 I 为复平面的原点，设 A，B 的复数为 z_1，z_2，则 $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IB}e^{\frac{5\pi}{6}i} = z_2 e^{\frac{5\pi}{6}i}$，$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} \cdot e^{-\frac{5\pi}{6}i} = z_1 e^{-\frac{5\pi}{6}i}$。

因而 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{IE} - \overrightarrow{ID} = z_1 e^{-\frac{5\pi}{6}i} - z_2 e^{\frac{5\pi}{6}i}$。

又 $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} = (z_1 - z_2)e^{-\frac{\pi}{3}i}$，所以

$$\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BO} = z_2 + (z_1 - z_2)e^{-\frac{\pi}{3}i} = z_1 e^{-\frac{\pi}{3}i} + z_2(1 - e^{-\frac{\pi}{3}i})。$$

于是 $\overrightarrow{IO} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = z_1 e^{-\frac{\pi}{3}i} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} + z_2(1 - e^{-\frac{\pi}{3}i}) \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = z_1 e^{-\frac{5\pi}{6}i} - z_2 e^{\frac{5\pi}{6}i}$，

即 $\overrightarrow{IO} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}i} = \overrightarrow{DE}$，故 $DE \perp IO$ 且 $DE = IO$。

例 9 是否存在一个凸 1990 边形，同时具有下面的性质（ⅰ）与（ⅱ）：

（ⅰ）所有内角均相等？

（ⅱ）1990 条边的长度是 1，2，…，1989，1990 的一个排列？

分析 1990 是一个很大的偶数，边数太多，不容易找到规律，先看边数较小的偶数边的情形。

凸四边形如果满足（ⅰ），则必为矩形，边长不可能是 1，2，3，4 的排列。

存在满足条件（ⅰ）且边长是 1，2，3，4，5，6 的排列的凸六边形。如图 5-6 所示的六边形就是一个例子，它的三双对边之差都等于 3。



图 5-6

对于凸 1990 边形，能否也可用类似于图 5-6 的方法安排它的边长呢？

解 设在复平面上有一条折线 $A_1A_2\cdots A_{1990}A_{1991}$，构成折线的各条线段长为 $A_iA_{i+1} =$

a_k（$k=1,2,\cdots,1990$），且点 A_1 对应复数为 0，A_2 在实轴的上半轴上，从向量 $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ 逆时针方向旋转角 $\theta=\frac{\pi}{995}$ 后与 $\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$ 同向（$k=1,2,\cdots,1990$）。令 $z=e^{i\theta}$，则 A_{1991} 对应的复数 w 由下式确定：$w=a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots+a_{1990}z^{1989}$，当且仅当 $w=0$ 时，点 A_{1991} 与 A_1 重合，因而得到凸1990边形，它的每个内角都等于 $\pi-\theta$。于是原问题等价于存在 $1,2,\cdots,1990$ 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_{1990}$，使得 $\sum_{k=1}^{1990}a_ke^{ik\theta}=0$ ①

因为1990是偶数，故 $a_je^{ij\theta}$ 与 $a_{j+995}e^{i(j+995)\theta}$（约定 $a_{1990+j}=a_j$，$j=1,2,3,\cdots$）恰是相应向量方向相反的两个复数。因此，不妨考虑偶数项的复数与其相反方向的复数进行合并，即 $a_{2k}e^{2ki\theta}+a_{2k+995}e^{i(2k+995)\theta}=(a_{2k}-a_{2k+995})e^{2ki\theta}$，$k=1,2,\cdots,995$

令 $b_k=a_{2k}-a_{2k+995}$，$k=1,2,\cdots,995$，则①式变为 $\sum_{k=1}^{995}b_ke^{2ki\theta}=0$ ②

取 (a_{2k},a_{2k+995})，$k=1,2,\cdots,995$ 为 $(k,k+995)$，$k=1,2,\cdots,995$，则 $b_k=-995$，$k=1,2,\cdots,995$，从而有 $\sum_{k=1}^{995}b_ke^{2ki\theta}=-995\sum_{k=1}^{995}e^{2ki\theta}=0$，即②成立。

这样就证明了满足（Ⅰ）与（Ⅱ）的凸1990边形存在。

评注 从上面证明可以看出，如果将1990换成任意一个 $4n+2$（$n\in N^*$）型的正整数，结论仍成立。而且可得到下面的简单方法来安排各边的长度：将各边顺次编号，然后将奇数号的边长顺次取为 $1,2,3,\cdots,2n+1$，其余各边长度等于其对边长度加上 $2n+1$。

有了解答例9的经验，我们可以来处理第31届IMO第六题。

例10 证明存在一个凸1990边形，同时具有下面的性质（Ⅰ）与（Ⅱ）：

（Ⅰ）所有的内角均相等；

（Ⅱ）各条边的长度是 $1^2,2^2,\cdots,1990^2$ 的一个排列。

分析 本题要证明的结论比例9强得多，例9的解法不能照搬。重新仔细观察边数：$1990=2\times995=2\times5\times199$。在例9的解法中，利用995是奇数，导出了一些有用的复数等式。现在要得到更强的结论，也许需要更多的复数等式。5和199都是奇数，并且都是质数，能否由此导出新的有用的复数等式？

证明 由例9②知，只需证明：存在 $b_k=a_{2k}-a_{2k+995}$（$k=1,2,\cdots,995$）使

$$\sum_{k=1}^{995}b_ke^{2ki\theta}=0 \quad ③$$

取 $a_{2k}=c_k^2$，$a_{2k+995}=(c_k+995)^2$，$k=1,2,\cdots,995$，约定 $a_{1990+j}=a_j$，$j=1,2,3,\cdots$，则

$$0=\sum_{k=1}^{995}(a_{2k}-a_{2k+995})e^{2ki\theta}$$

$$=-1990\sum_{k=1}^{995}c_ke^{2ki\theta}-995^2\sum_{k=1}^{995}e^{2ki\theta}=-1990\sum_{k=1}^{995}c_ke^{2ki\theta}.$$



即 $\sum c_k e^{2k\pi i} = $ [illegible]

现在要确定辅助未知数 [illegible] 注意到 [illegible] 199，所以

$$\sum e^{[illegible]}$$

$$\sum [illegible] \quad ⑥$$

由 [illegible] 得

$$[illegible] \sum e^{[illegible]}, h = [illegible] \quad ⑦$$

$$[illegible] \sum e^{[illegible]} = 0, l = 0, 1, \cdots, 198 \quad ⑧$$

将上面所有形如 ⑦、⑧ 的等式相加，得 ③，其中 $c_k = u_k + v_k (k = 1, 2, \cdots, 995)$，

[illegible] 是 k 被 [illegible] 除和被 [illegible] 除所得的余数，又若取

u [illegible] $h, h = 0, 1, 2, \cdots$ [illegible]

[illegible] $l + 1, l = 0, 1, 2, \cdots, 198$，

则 $c_k = 1996 + l + 1, k = 1, \cdots, 995$ [illegible] 由于 [illegible] 1，所得的 995 个 c_k 值各不相同，[illegible] 所以 [illegible] 的值是 1, 2, …, 995 的一个排列，从而得到 a_1, a_2, [illegible] 是 [illegible] 的一个排列。

这样就具体构造出了一个同时满足本题条件（ⅰ）与（ⅱ）的凸 1990 边形。

评注 从本题的解题过程可以看出 [illegible] 换成任意两个互质的大于 1 的奇数，仍能进行类似的论证过程，这样就可将本题推广为下面的命题：

对于任意两个互质的 [illegible] p 与 q，存在同时满足下面两个条件的凸 $2pq$ 边形：

（ⅰ）所有的内角 [illegible]；

（ⅱ）将其各边 [illegible] 奇数号的边长是 1, 2, …, $(pq-1)$, (pq) 的一个排列，偶数号的边长 [illegible] $(pq$ [illegible]$)$, …, $(2pq-1)$, $(2pq)$ 的一个排列。

思考交流

思考题 1 圆内接六边形 $ABCDEF$ 的边满足 $AB = CD = EF = r$ [illegible] 为圆半径，又设 G, H, K 分别是边 BC, DE, FA 的中点，求证 [illegible] GHK 是正三角形。

证明 不妨假设顶点 A, B, C, D, E, F 按逆时针方向排列，另取圆心为原点建立复平

面，并使点 A 在实轴上，如图 5-7 所示. 又设图中字母同时也表示相应点的复数. 由条件 $AB=CD=EF=r$，可得 $\angle AOB=\angle COD=\angle EOF=\frac{\pi}{3}$，因此有 $B=re^{\frac{\pi}{3}i}=-re^{\frac{4\pi}{3}i}=-r\omega^2$，$D=C\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}=-C\cdot\omega^2$，$F=E\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}=-E\cdot\omega^2$，

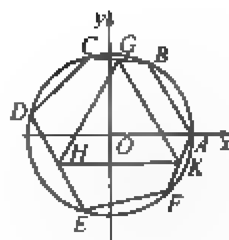


图 5-7

其中 $\omega=e^{\frac{2\pi}{3}i}$. 于是中点

$$G=\frac{B+C}{2}=\frac{-r\omega^2+C}{2},\quad H=\frac{D+E}{2}=\frac{-C\omega^2+E}{2},$$

$$K=\frac{F+A}{2}=\frac{-E\omega^2+r}{2}.$$

由此可算得 $G+\omega H+\omega^2 K=0$. 根据例 7 的结论知 $\triangle GHK$ 是正三角形.

同步检测 5

1. 已知 $\triangle ABC$ 和平面上点 P，见图 5-8. $|PC|=27$. P 依次"跳"到其关于 A、B、C、A、B、C、… 的对称位置. 问，经过 1991 次对称跳后所能跳到的地方离 P 点有多远？

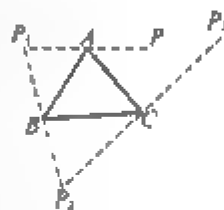


图 5-8

2. 设 $\triangle ABC$ 的三条中线交于 O 点，求证 $AB^2+BC^2+CA^2=3(OA^2+OB^2+OC^2)$.

3. (伯恩斯坦定理) 如果 a、b、c、d 顺次是凸四边形 $ABCD$ 的边长，m 和 n 是它的对角线长，则 $m^2n^2=a^2c^2+b^2d^2-2abcd\cos(A+C)$.

4. 设 $ABCD$ 为凸四边形，$AC=BD$，在它的边 AB、BC、CD、DA 上分别作中心为 O_1、O_2、O_3、O_4 的等边三角形. 求证：$O_1O_3\perp O_2O_4$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$2AB=BC+CA$. 求证：此三角形的内心、外心、BC 的中点以及 AC 的中点四点共圆.

6. 凸四边形 $ABCD$ 围绕它所在平面内一点 O 逆时针方向旋转 $90°$，得到凸四边形 $A'B'C'D'$. 假设 P、Q、R、S 依次是 $A'B$、$B'C$、$C'D$、$D'A$ 的中点. 求证：$PR\perp QS$，$PR=QS$.

7. 在任意 $\triangle ABC$ 各边的外侧作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$、$\triangle ARB$，使得 $\angle PBC=\angle CAQ=45°$，$\angle BCP=\angle QCA=30°$，$\angle ABR=\angle BAR=15°$. 求证：$\angle PRQ=90°$，$QR=PR$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60°$，过该三角形的内心 I 作直线平行于 AC，交 AB 于 F

在 BC 边上取点 P，使得 $3BP = BC$．求证 $\angle BFP = \frac{1}{2}\angle B$.

9．正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC 和 CE 分别被内分点 M、N 分成如下的比例 $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r$．若 B、M、N 三点共线，试求比值 r.

10．已知 P 为正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆上任一点．

(1) 求 $\sum_{k=1}^{n}|PA_k|$ 的最大值和最小值；

(2) 当 P 不限制在圆周上时，$\sum_{k=1}^{n}|PA_k|$ 的最小值是多少？

第 讲　多项式的基本概念

知识点金

设 $n\in\mathbf{N}$，关于 x 的表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0, \quad ①$$

其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_0\in\mathbf{K}$（$\mathbf{K}$ 为某个数集，如 $\mathbf{Z}$（整数集）、$\mathbf{Q}$（有理数集）、$\mathbf{R}$（实数集）或 $\mathbf{C}$（复数集）），称为系数在 $\mathbf{K}$ 中的一元多项式，亦可称为 $\mathbf{K}$ 上的一元多项式。所有形如①的多项式的集合，记作 $\mathbf{K}[x]$。

在多项式①中，a_ix^i 称为 i 次项，a_i 称为 i 次项的系数，$i=0,1,\cdots,n$。两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等（或恒等），是指 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中同次项的系数都相等，记作 $f(x)=g(x)$（或 $f(x)\equiv g(x)$）。

在①中，如果 $a_n\neq 0$，则称 a_nx^n 为多项式 $f(x)$ 的首项，a_n 为首项系数，n 为多项式 $f(x)$ 的次数，记作 $\deg f$。特别地，当 $n=0$ 时，$f(x)=a_0\neq 0$ 称为零次多项式。如果 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_0=0$，则称 $f(x)=0$ 为零多项式，零多项式是唯一不定义次数的多项式。

$\mathbf{K}[x]$ 中的多项式可作加、减、乘法运算。设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0,$$

是 $\mathbf{K}[x]$ 中的两个多项式。在表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和（或差）时，若 $n>m$，为了方便，我们令 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_{m+1}=0$。定义

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_0+b_0),$$

$$f(x)-g(x)=(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_0-b_0),$$

$$f(x)\cdot g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0,$$

其中 $c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0$，$k=0,1,\cdots,n+m$。

下面是关于多项式次数的基本结论. 设 $f(x)$、$g(x)$ 是 $K[x]$ 中的非零多项式.

(1) 若 $f(x)+g(x)$ 非零，则 $\deg(f+g)\leqslant\max\{\deg f,\deg g\}$；

(2) $\deg fg=\deg f+\deg g$.

多项式是代数学中一个非常基本的研究对象，初等代数的许多问题都与多项式有关. 多项式函数是形态最简单的初等函数，代数式变形的许多应用是针对多项式进行的.



例题精析

例 1 试将多项式 x^4+3x^2-2x+3 表示为两个不同次数的整系数多项式的平方差，并求出所有解.

分析 如果 $x^4+3x^2-2x+3=f^2-g^2$，f、g 是整系数多项式，$\deg f\neq\deg g$，则 $(-f,g)$、$(f,-g)$、$(-f,-g)$ 也是解. 所以，不妨设 f、g 的首项系数都为正数. 因此可设 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=cx+d$.

解 不妨设 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=cx+d$ 满足条件，其中 a、b、c、d 是待定系数，且 $c>0$，a、b、c、d 是整数，于是 $f^2-g^2=(x^2+ax+b)^2-(cx+d)^2$.

所以 $x^4+3x^2-2x+3=x^4+2ax^3+(a^2+2b-c^2)x^2+(2ab-2cd)x+b^2-d^2$.

由多项式恒等，得方程组 $\begin{cases}2a=0\\a^2+2b-c^2=3\\2ab-2cd=-2\\b^2-d^2=3\end{cases}$.

解得 $a=0$，$b=2$，$c=1$，$d=1$. 所以 $f(x)=x^2+2$，$g(x)=x+1$. 其余三组解为 $(-f,g)$、$(f,-g)$、$(-f,-g)$.

评注 例 1 的方法称为待定系数法，它由多项式相等（恒等）的定义，作出同次项系数的等式，进而确定所求的多项式或导出矛盾.

例 2 设整数 k 不能被 5 整除，求证：多项式 x^5-x+k 不能写成两个次数较低的整系数多项式的乘积. 如果 k 是 5 的倍数，那么情况又如何？

分析 用反证法. 如果 x^5-x+k $(5\nmid k)$ 能够写成两个次数较低的整系数多项式的乘积，有两种情形：一种是一个 1 次多项式与一个 4 次多项式的乘积，另一种是一个 2 次多项式与一个 3 次多项式的乘积. 利用待定系数法处理.

证明 当 5 不能整除 k 时，如果 x^5-x+k 能够写成两个次数较低的整系数多项式的乘积，那么只有下面两种可能：

(1) $x^5-x+k=(x+a)(x^4+bx^3+cx^2+dx+e)$，



(2) $x^5-x+k=(x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e)$

对于第一种情形，令 $x=-a$ 代入，得 $-a^5+a+k=0$，所以 $k=a^5-a$.

由于 a 是整数，根据费尔马小定理，有 $5\mid a^5-a$，这与 $5\nmid k$ 矛盾.

对于第二种情形，比较两边的系数，得

$$\begin{cases}a+c=0\\ ac+b+d=0\\ e+ad+bc=0\\ ae+bd=-1\\ be=k\end{cases}$$

所以 $c=-a$，$d=-ac-b=a^2-b$，$e=-ad-bc=2ab-a^3$. 将它们代入后两式，得 $3a^2b+1=a^4+b^2$，$ab(2b-a^2)=k$.

所以 $\quad k=a(2b^2-a^2b)=a[2(3a^2b+1-a^4)-a^2b]$

$\qquad =a(5a^2b-2a^4+2)=5a^3b-2(a^5-a)$.

于是，仍由费尔马小定理知，$5\mid k$. 矛盾.

所以当 $5\nmid k$ 时，x^5-x+k 不能写成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

当 $5\mid k$ 时，x^5-x+k 有可能分解为两个次数较低的整系数多项式的积. 例如：

$$x^5-x-15=(x^2-x+3)(x^3+x^2-2x-5).$$

例3 设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in\mathbf{R}[x]$，满足：$0\leqslant a_i\leqslant a_0$，$i=1,2,\cdots,n$. 又设 $b_i(i=0,1,\cdots,2n)$ 满足 $[f(x)]^2=b_{2n}x^{2n}+b_{2n-1}x^{2n-1}+\cdots+b_1x+b_0$，求证：$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}[f(1)]^2$.

分析 根据多项式的乘法，可知 $b_{n+1}=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1$，再利用题设及不等式的知识证明.

证明 根据多项式的乘法，可知 $b_{n+1}=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1$. 因为 $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$，利用条件 $0\leqslant a_i\leqslant a_0(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\frac{1}{2}[f(1)]^2=\frac{1}{2}(a_0+a_1+\cdots+a_n)^2$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\sum_{k=0}^{n}a_k^2+2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\Big]\geqslant\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j$$

$$\geqslant a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_na_1=b_{n+1}.$$

例4 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，$g(x)=c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$ 是两个实系数非零多项式，且存在实数 r，使得 $g(x)=(x-r)f(x)$. 记 $a=\max\{|a_n|,|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|\}$，$c=\max\{|c_{n+1}|,|c_n|,\cdots,|c_0|\}$，求证：$\frac{a}{c}\leqslant n+1$.

证明 因为 $c_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0=(x-r)(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)$ ①



所以 $c_{n+1} = a_n$, $c_n = a_{n-1} - ra_n$, $c_{n-1} = a_{n-2} - ra_{n-1}$, $\cdots$, $c_1 = a_0 - ra_1$, $c_0 = -ra_0$.

于是 $a_n = c_{n+1}$, $a_{n-1} = c_n + rc_{n+1}$, $a_{n-2} = c_{n-1} + rc_n + r^2c_{n+1}$, $\cdots$,

$a_0 = c_1 + rc_2 + r^2c_3 + \cdots + r^nc_{n+1}$.

若 $|r| \leqslant 1$，则

$a_n = |c_{n+1}| \leqslant c$,

$a_{n-1} \leqslant |c_n| + |r||c_{n+1}| \leqslant 2c$,

$\cdots\cdots$

$a_0 \leqslant |c_1| + |r||c_2| + |r|^2|c_3| + \cdots + |r|^n|c_{n+1}| \leqslant (n+1)c$.

由此可见，$a \leqslant (n+1)c$.

若 $|r|>1$，则在①式两边同除以 rx^{n+1}，并令 $y=\frac{1}{x}$，得

$$-\frac{c_0}{r}y^{n+1} - \frac{c_1}{r}y^n - \cdots - \frac{c_{n+1}}{r} = \left(y-\frac{1}{r}\right)(a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_n)$$

和前面一样，有 $a \leqslant (n+1)\cdot\frac{c}{|r|} < (n+1)c$.

综上所述，命题得证.

例 5 求证：整系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等的充要条件是：存在 $t\in \mathbf{Z}$，使得 $f(t)=g(t)$，这里 t 是大于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的所有系数绝对值 2 倍的某个整数.

分析 必要性是显然的. 若 $f(t)=g(t)$，反复利用下面整除的性质：$s, t\in \mathbf{Z}$，$t\mid s$，若 $t>|s|$，则 $s=0$. 即可证充分性.

证明 必要性是显然的. 下面证明充分性.

设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$,

$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$.

若 $f(t)=g(t)$，其中 t 是大于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的所有系数绝对值 2 倍的某个整数，于是

$$a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0 = b_mt^m + b_{m-1}t^{m-1} + \cdots + b_1t + b_0. \quad ①$$

由此可知，$t\mid a_0 - b_0$. 但是 $|a_0 - b_0| \leqslant |a_0| + |b_0| < \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$.

因此 $a_0 - b_0 = 0$，即 $a_0 = b_0$. 从而①式中消去 a_0 与 b_0，再除以 t，得

$$a_nt^{n-1} + a_{n-1}t^{n-2} + \cdots + a_2t + a_1 = b_mt^{m-1} + b_{m-1}t^{m-2} + \cdots + b_2t + b_1.$$

根据同样道理，又得 $a_1 = b_1$. 如此继续下去，可得 $m=n$，且 $a_k=b_k$，$k=0,1,\cdots,n$. 即 $f(x)=g(x)$.

例 6 设 $f(x)$ 是一个多项式. 求证：$f(x)=kx$（k 为常数）的充要条件：对任意 a，b 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$. ①

分析 必要性是显然的. 通过对①式赋特殊值，并利用待定系数法，比较①式两边



同次项的系数，可以确定 $f(x)=kx$（k 为常数）.

证明 由于 $f(x)=kx$，所以 $f(a+b)=k(a+b)=ka+kb=f(a)+f(b)$，故必要性成立.

下面证明充分性.

当 $f(x)=0$ 时，$f(x)=0\cdot x$，结论成立；当 $f(x)\neq 0$ 时，设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，由于 $f(0)=f(0)+f(0)$，故 $f(0)=a_n=0$. 此时，$f(x)$ 的次数 n 不能大于 1. 事实上，若 $n>1$，则 $a_0\neq 0$. 令 $a=x$，b 为一固定的非零数，则 $f(x+b)=f(x)+f(b)$，即 $a_0(x+b)^n+a_1(x+b)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x+b)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+f(b)$.

比较两边关于 x 的 $n-1$ 次项的系数，得 $a_0nb+a_1=a_1$，

从而 $na_0b=0$，这与 $a_0\neq 0$，$b\neq 0$ 矛盾.

故 $f(x)$ 的次数不能大于 1，亦即 $f(x)=a_{n-1}x$. 总之，有 $f(x)=kx$（k 为常数）.

例 7 求出所有满足 $f(x^2)=f^2(x)$ 的实系数非零多项式 $f(x)$.

分析 利用待定系数法，比较式子 $f(x^2)=f^2(x)$ 两边同次项的系数.

解 设所求的多项式为 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n\neq 0(n\in\mathbf{N})$. 下面我们证明：$a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$.

假设 $a_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 不全为零，设 $k<n$ 是使 $a_k\neq 0$ 的最大下标. 由 $f(x^2)=f^2(x)$，得 $a_nx^{2n}+a_kx^{2k}+\cdots+a_1x^2+a_0=(a_nx^n+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0)^2$.

比较 x^{n+k} 的系数，得出 $0=2a_na_k$，这与 $a_n\neq 0$，$a_k\neq 0$ 矛盾. 因此我们的断言正确，即 $f(x)=a_nx^n$.

再由 $f(x^2)=f^2(x)$，即知 $a_n=1$，故 $f(x)=x^n(n\in\mathbf{N})$ 即为所求.

例 8 多项式序列 $p_1(x)$，$p_2(x)$，$\cdots$，$p_n(x)$，$\cdots$，满足 $p_2(x)=x^2-2$，且对任意 $1<i<j$，有 $p_i(p_j(x))=p_j(p_i(x))$，其中 $p_i(x)$ 为 i 次实系数多项式. 求所有这样的多项式序列.

分析 先证明满足 $p_2(p_i(x))=p_i(p_2(x))$ 的 i 次实系数多项式是唯一的，再通过构造符合题目条件的多项式序列获解.

解 分两步完成求解.

(1) 证明满足 $p_i(p_2(x))=p_2(p_i(x))$ 的 i 次实系数多项式是唯一的.

比较 $p_2(p_i(x))$ 与 $p_i(p_2(x))$ 的首项系数，即知 $p_i(x)$ 的首项系数等于 1.

再用反证法. 设 $p_i^*(x)$ 是异于 $p_i(x)$ 的合乎要求的 i 次实系数多项式，则 $p_i^*(p_2(x))=p_2(p_i^*(x))$，于是 $p_2(p_i^*(x))-p_2(p_i(x))=p_i^*(p_2(x))-p_i(p_2(x))$.

再由 $p_2(x)=x^2-2$，得 $(p_i^*(x)-p_i(x))(p_i^*(x)+p_i(x))=p_i^*(p_2(x))-p_i(p_2(x))$ ①

设 $p_i^*(x)-p_i(x)$ 的次数为 k，则 $k<i$，且 $p_i^*(p_2(x))-p_i(p_2(x))$ 的次数为 $2k$，而①式左



边多项式的次数等于 $k+s$，大于 $2k$，矛盾，故假设不成立，从而使 $p(p_s(x))=p_s(p(x))$ 的 s 次实系数多项式唯一.

(2) 构造符合题目要求的多项式序列.

构造多项式序列：$p_1(x)=x$，$p_2(x)=x^2-2$，

$p_{n+2}(x)=xp_{n+1}(x)-p_n(x)(n\in \mathbf{N}^*)$.

下面证明这样定义的多项式序列符合题目要求.

易用归纳法证明 $p_n(2\cos x)=2\cos nx$，$\forall x\in \mathbf{R}$.

从而对一切 $x\in \mathbf{R}$，有 $p_i(p_j(2\cos x))=p_i(2\cos jx)=2\cos(ij)x$

$$=p_j(2\cos ix)=p_j(p_i(2\cos x)).$$

于是 $p_i(p_j(x))-p_j(p_i(x))=0$ 有无穷多个根，故 $p_i(p_j(x))=p_j(p_i(x))$ 成立.

综上所述，这样的序列为唯一满足要求的多项式序列.

例 9 设 p,q 是不同的素数，正整数 $n\geqslant 3$. 求所有整数 a，使得多项式 $f(x)=x^n+ax^{n-1}+pq$ 可以分解为两个正次数的整系数多项式之积.

分析 注意到 p、q 是不同的素数，利用多项式各项的系数的整除性来确定多项式 $f(x)$ 分解出的两个正次数的整系数多项式的次数与系数.

解 设 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$，其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 是正次数的整系数多项式. 由于 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式，所以 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的首次系数也为 1. 不妨设 $g(x)=x^r+a_{r-1}x^{r-1}+\cdots+a_0$，$h(x)=x^s+b_{s-1}x^{s-1}+\cdots+b_0$，其中 $r,s\geqslant 1$ 且 $r+s=n$，$a_0,a_1,\cdots,a_{r-1},b_0,b_1,\cdots,b_{s-1}$ 是整数. 于是 $a_0b_0=pq$，因此 p 整除 a_0 或 b_0，但不同时整除 a_0 和 b_0. 不妨设 $p\nmid b_0$，则 $p\mid a_0$.

设 $p\mid a_0,\cdots,p\mid a_{t-1}$，$p\nmid a_t$，于是 $g(x)\cdot h(x)$ 的 t 次项系数

$$a_tb_0+a_{t-1}b_1+\cdots+a_1b_{t-1}+a_0b_t\equiv a_tb_0\not\equiv 0(\bmod p).$$

注意到 $f(x)$ 中次数小于 $n-1$ 的项的系数都是 p 的倍数，因此 $t\geqslant n-1$. 所以 $r\geqslant t\geqslant n-1$.

于是由 $r+s=n$ 及 $r,s\geqslant 1$ 得到 $r=n-1$，$s=1$. 因此 $h(x)=x-b_0$，$p\nmid b_0$.

另一方面，$q\mid a_0b_0$. 如果 $q\mid b_0$，则同理可证 $s=n-1$. 于是 $n=2$，与 $n\geqslant 3$ 矛盾. 因此，$q\nmid b_0$. 由于 $b_0\mid pq$，所以 $b_0=\pm 1$，故 $h(x)=x\pm 1$.

如果 $b_0=1$，则 $h(x)=x+1$，因此 $f(-1)=0$，即 $(-1)^n+a\cdot(-1)^{n-1}+pq=0$，所以 $a=(-1)^npq+1$.

如果 $b_0=-1$，则 $h(x)=x-1$，因此 $f(1)=0$，即 $1+a+pq=0$，所以 $a=-pq-1$.

容易验证，当 $a=(-1)^npq+1$ 或 $a=-pq-1$ 时，$f(x)$ 均可分解为两个正次数的整系数多项式之积，于是所求 a 的值为 $(-1)^npq+1$ 或 $-pq-1$.

例 10 多项式$(1-z)^{b_1}\cdot(1-z^2)^{b_2}\cdot(1-z^3)^{b_3}\cdots(1-z^{32})^{b_{32}}$中,$b_i(i=1,2,\cdots,32)$为正整数,并且该多项式具有下列奇妙的性质:把它乘开之后,删去z的高于32次的那些项,恰留下$1-2z$.试决定b_{32}(答案可以表示为两个2的方幂之差).

分析 设题设中的多项式$f(z)=1-2z+g(z)$,其中$g(z)$的每一项都高于32次,比较多项式中z的系数即可确定b_1.再利用$f(-z)=1+2z+g(-z)$,通过比较$f(z)\cdot f(-z)$中z^2的系数即可确定b_2,进而确定b_{32}.

解 设$f(z)=(1-z)^{b_1}\cdot(1-z^2)^{b_2}\cdot(1-z^3)^{b_3}\cdots(1-z^{32})^{b_{32}}=1-2z+g(z)$,
其中$g(z)$的每一项都高于32次.

比较两边z的系数,得$b_1=2$.又

$$f(-z)=(1+z)^{b_1}\cdot(1-z^2)^{b_2}\cdot(1+z^3)^{b_3}\cdot\cdots\cdot(1-z^{32})^{b_{32}}$$
$$=1+2z+g(-z),$$

$$f(z)\cdot f(-z)=(1-z^2)^{b_1+2b_2}\cdot(1-z^4)^{2b_4}\cdot(1-z^6)^{b_3+2b_6}\cdot(1-z^8)^{2b_8}\cdot$$
$$(1-z^{10})^{b_5+2b_{10}}\cdot\cdots\cdot(1-z^{30})^{b_{15}+2b_{30}}\cdot(1-z^{32})^{2b_{32}}$$
$$=1-4z^2+g_1(z),$$

其中$g_1(z)$的每一项的次数都高于32,并且都是偶数.

令$w=z^2$,$f_1(w)=f(z)f(-z)$,则

$$f_1(w)=(1-w)^{b_1+2b_2}\cdot(1-w^2)^{2b_4}\cdot(1-w^3)^{b_3+2b_6}\cdot(1-w^4)^{2b_8}\cdot(1-w^5)^{b_5+2b_{10}}$$
$$\cdot\cdots\cdot(1-w^{15})^{b_{15}+2b_{30}}\cdot(1-w^{16})^{2b_{32}}$$
$$=1-4w+g_2(w),$$

其中$g_2(w)$的每一项关于w的次数都高于16.

比较上式w的系数,得$b_1+2b_2=4$,从而$b_2=1$.

再重复以上步骤,设$r=w^2$,$f_2(r)=f_1(w)f_1(-w)$,可得

$$f_2(r)=(1-r)^{b_1+2b_2+4b_4}\cdot(1-r^2)^{4b_8}\cdot(1-r^3)^{b_3+2b_6+4b_{12}}\cdot(1-r^4)^{4b_{16}}\cdot(1-r^5)^{b_5+2b_{10}+4b_{20}}$$
$$\cdot(1-r^6)^{4b_{24}}\cdot(1-r^7)^{b_7+2b_{14}+4b_{28}}\cdot(1-r^8)^{4b_{32}}$$
$$=1-16r+g_3(r),$$

其中$g_3(r)$的每一项关于r的次数高于8.

比较两边r的系数,得$b_1+2b_2+4b_4=16$,由$b_1=2$,$b_2=1$得$b_4=3$.

继续上面的过程,可依次得$b_8=30$,$b_{16}=2^{12}-2^4=4080$.最后由

$$b_1+2b_2+4b_4+8b_8+16b_{16}+32b_{32}=2^{32},$$

得 $b_{32}=\frac{2^{32}-2^{16}}{32}=2^{27}-2^{11}$.





思考交流

求所有的 $p(x)\in\mathbf{R}[x]$，使得对任意的 $x\neq 0$，均有 $p(x)^2+p\left(\frac{1}{x}\right)^2=p(x^2)p\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

解 我们从 $p(x)$ 的次数出发讨论.

若 $p(x)$ 为常数多项式，设 $p(x)=c$，则 $c^2+c^2=c^2$，可知 $c=0$，即 $p(x)=0$.

若 $\deg p\geqslant 1$，设 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，$a_n\neq 0$，$n\in\mathbf{N}^*$. 由条件，可知

$$x^{2n}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0)^2+(a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n)^2$$
$$=(a_nx^{2n}+a_{n-1}x^{2n-2}+\cdots+a_0)(a_0x^{2n}+a_1x^{2(n-1)}+\cdots+a_n).$$

比较两边常数项，可知 $a_n^2=a_0a_n$，故 $a_n=a_0$；再比较两边 x 项系数，得 $2a_{n-1}a_n=0$，故 $a_{n-1}=0$；比较两边 x^{4n-1} 项系数，得 $2a_1a_0=0$，又 $a_0=a_n\neq 0$，故 $a_1=0$. 从而右边 x^{4n-2} 和 x^2 项系数等于 0；再比较两边 x^{4n-2} 与 x^2 项系数，可知 $a_2=0$，$a_{n-2}=0$. 依次类推，可知 $a_{n-1}=\cdots=a_1=0$. 于是 $p(x)=a_nx^n+a_n$，$a_n\neq 0$，这要求 $x^{2n}(x^n+1)^2+(x^n+1)^2=(x^{2n}+1)^2$，矛盾.

所以，满足条件的多项式只有一个，即 $p(x)=0$.

同步检测 6

1. 设多项式 $p_k(x)=(\cdots(((x-2)^2-2)^2-2)^2\cdots-2)^2$，其中 k 是任意给定的正整数，试求 $p_k(x)$ 中 x^2 的系数.

2. 将多项式 x^8+4x^2+1 分解为两个四次多项式的乘积.

3. 设 $P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，求证：存在正次数的整系数多项式 $Q(y)$ 和 $R(y)$，使得 $Q(y)\cdot R(y)=P(5y^2)$.

4. 给定 n 个不同的整数 $m_1,m_2,\cdots,m_n$，求证：存在一个次数为 n 的整系数多项式 $f(x)$ 满足如下条件：

(1) $f(m_i)=-1$，$1\leqslant i\leqslant n$；

(2) $f(x)$ 不能分解成两个次数不小于 1 的整系数多项式的乘积.

5. 已知 $f(x)$ 是 x 的 $n(n>0)$ 次多项式，且对任意的实数 x，满足 $8f(x^3)-x^6f(2x)-2f(x^2)+12=0$. 求 $f(x)$.



6. 设 r 个多项式 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_r(x)$ 的次数依次为 $n_1, n_2, \cdots, n_r$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_r<\frac{1}{2}(r-1)r$。求证：存在不全为零的 $a_1, a_2, \cdots, a_r$，使 $a_1p_1(x)+a_2p_2(x)+\cdots+a_rp_r(x)\equiv 0$。

7. 设 n 是任意正整数，计算 $S_n=\sum 2^{[illegible]}C_{[illegible]}$。

8. 对任何正整数 n，求证：$\sum C_{[illegible]} = C_{[illegible]}$。

9. 求证：如果三个实系数多项式 $P(x)$，$Q(x)$ 和 $R(x)$ 对所有 $x\in\mathbf{R}$ 都满足 $P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$，并且至少有一个点 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $P(x_0)=R(x_0)$，则存在 $k\in[0,1]$，使得 $Q(x)=kP(x)+(1-k)R(x)$。对四次多项式，类似的结论是否成立？

10. 设 $\{a_n\}$ 是著名的斐波那契数列，其定义如下：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$。求证：如果多项式 $p(x)$ 满足当 $k=992, 993, \cdots, 1982$ 时，$p(k)=a_k$，则 $p(1983)=a_{1983}-1$。

11. 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 是满足下列条件的 n 个实数：对任何整数 $k>0$，有 $a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k\geqslant 0$ 成立。令 $p=\max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$，求证：$p=a_1$，并且对任何 $x>a_1$，均有 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant x^n-a_1^n$。



第讲 多项式的整除性

知识点含

在上一讲中，我们介绍了多项式的加、减和乘法运算．关于多项式的除法，有类似于两个整数相除的运算和性质．

设 $f(x)=5x^3-2x^2+8$，$g(x)=x^2-3x+1$，我们可以按下面的格式来作多项式除法．

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2-3x+1 & 5x^3-2x^2+0x+8 & 5x+13 \\
 & 5x^3-15x^2+5x & \\
\hline
 & \quad 13x^2-5x+8 & \\
 & \quad 13x^2-39x+13 & \\
\hline
 & \qquad 34x-5 &
\end{array}
$$

于是求得商式 $5x+13$，余式 $34x-5$．所得结果可以写成

$$5x^3-2x^2+8=(x^2-3x+1)(5x+13)+34x-5$$

以上运算具有一般性．以 F 代表 Q、R 或 C（当某些概念和结果对整系数多项式也适用时，我们将特别指出），于是

带余除法　设 $f(x)$，$g(x)\in F[x]$，且 $g(x)\neq 0$，则存在 $F[x]$ 中的多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$，使得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)$ 或者为零，或者 $\deg r<\deg g$；并且商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 由这些条件唯一确定．

证明　$q(x)$，$r(x)$ 的存在性可由上面的除法直接得出．现证唯一性．

设另有 $F[x]$ 中的多项式 $q'(x)$，$r'(x)$，使得 $f(x)=g(x)q'(x)+r'(x)$

且 $r'(x)$ 或者为零，或者 $\deg r' < \deg g$，则有 $(q(x)-q'(x))g(x)=r'(x)-r(x)$.

如果 $q(x)\neq q'(x)$，则由 $g(x)\neq 0$，得到 $r'(x)-r(x)\neq 0$，于是 $\deg(q-q')+\deg g=\deg(r'-r)$，这与 $\deg g>\deg(r'-r)$ 矛盾. 因此 $q(x)=q'(x)$，从而 $r(x)=r'(x)$.

在带余除法中，如果 $r(x)=0$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记作 $g(x)|f(x)$. 否则，称 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记作 $g(x)\nmid f(x)$. 关于多项式的整除性，有如下性质：

性质 1　$f(x)|g(x)$ 且 $g(x)|f(x)$ 的充分必要条件是存在非零常数 c，使得 $f(x)=cg(x)$.

性质 2　若 $f(x)|g(x)$ 且 $g(x)|h(x)$，则 $f(x)|h(x)$.

性质 3　若 $f(x)|g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $f(x)|\sum_{i=1}^{n}k_i(x)g_i(x)$，其中，$k_i(x)$ 是 $F[x]$ 中的任意多项式，$i=1,2,\cdots,n$.

由带余除法，容易得到下面的余数定理.

余数定理　对任意多项式 $f(x)$，$x-a$ 除 $f(x)$ 所得的余数等于 $f(a)$，即 $f(x)=(x-a)q(x)+f(a)$.

性质 4　多项式 $f(x)$ 含有因式 $x-a$ 的充要条件是 $f(a)=0$.

下面的这个定理非常有用，并且用综合除法不难证得.

定理　若 $f(x)$ 是 n 次整系数多项式，则它被另一个首项系数为 1 的 $m(m\leqslant n)$ 次整系数多项式 $g(x)$ 除，所得的商及余式也是整系数多项式.

多项式的整除性与数论中整数的整除性有许多类似的性质，我们引入一些概念，并且不加证明地列出一些结果.

定义　若 $q(x)|f(x)$，$q(x)|g(x)$，则称 $q(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式. 多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的公因式中次数最高的多项式称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，并用 $(f(x),g(x))$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式中首项系数为 1 的多项式.

关于最大公因式，有如下性质.

性质 1(裴蜀定理)　设 $(f(x),g(x))=d(x)$，则存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使得

$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$.

特别地，$d(x)=1$（这时称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互质）的充要条件是存在多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

性质 2　若 $q(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，则 $q(x)|d(x)$，这里 $d(x)=(f(x),g(x))$.

性质 3　若 $f(x)|h(x)$，$g(x)|h(x)$，并且 $(f(x),g(x))=1$，则 $f(x)g(x)|h(x)$.





例题精析

例 1 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 是一个 n 次多项式，且 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$。求证：$f(x^{k+1})$ 必能被 $x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$ 整除，这里 $n,k\in\mathbf{N}^*$。

分析 由 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$，得 $f(1)=0$，于是多项式 $f(x)$ 含因式 $x-1$。

证明 由 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$，得 $f(1)=0$，于是可设 $f(x)=(x-1)\varphi(x)$，这里 $\varphi(x)$ 是整式，从而

$$f(x^{k+1})=(x^{k+1}-1)\varphi(x^{k+1})=(x-1)(x^k+x^{k-1}+\cdots+1)\varphi(x^{k+1})$$

能被 $x^k+x^{k-1}+\cdots+1$ 整除。

例 2 试问：是否存在一个整数 a，使得 x^2+x+a 整除 $x^{15}+x^2+50$？

分析 这是一个探索性问题，"存在性"需要作出论证。这里我们采用分类讨论、分而治之的解题策略。

解 令 $f(x)=x^2+x+a$，$g(x)=x^{15}+x^2+50$。

若 $f(x)\mid g(x)$，则由于 $f(x)$ 的首项系数为 1，所以商式 $g(x)\div f(x)$ 是整系数多项式，从而对一切整数 k，当 $f(k)\neq0$ 时，有 $f(k)\mid g(k)$；当 $f(k)=0$ 时，有 $g(k)=0$。特别地，有 $f(0)\mid g(0)$、$f(-1)\mid g(-1)$，
即 $a\mid 50$，$a\mid 52$，所以 $a\mid 2$，于是 a 只有四种可能，即 $a=1,-1,2,-2$。

(1) 若 $a=1$，则 $f(x)=x^2+x+1$，但 $f(1)\nmid g(1)$，即 $3\nmid 52$，矛盾。

(2) 若 $a=-1$，则 $f(x)=x^2+x-1$，但 $f(2)\nmid g(2)$，即 $5\nmid 2^{15}+54$，矛盾。

(3) 若 $a=2$，则 $f(x)=x^2+x+2$，但 $f(10)\mid g(10)$，即 $112\mid(10^{15}+100+50)$，从而 $4\mid 10^{15}+100+50$，矛盾。

(4) 若 $a=-2$，则 $f(x)=x^2+x-2$，这时 $f(1)=0$，但 $g(1)=52\neq0$，所以 $f(x)\nmid g(x)$。

综上所述，不存在整数 a，使得 x^2+x+a 整除 $x^{15}+x^2+50$。

例 3 求证：$x(x+1)(2x+1)$ 能整除 $(x+1)^{2m}-x^{2m}-2x-1$（m 是正整数）。

分析 由于 x、$x+1$、$2x+1$ 是两两互质的多项式，所以只需证明 x、$x+1$、$2x+1$ 都能整除 $(x+1)^{2m}-x^{2m}-2x-1$。

证明 记 $f(x)=(x+1)^{2m}-x^{2m}-2x-1$，由

$f(0)=1^{2m}-0-0-1=0$，

$f(-1)=0^{2m}-(-1)^{2m}+2-1=0$，

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2m}-2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=0$，



知 x、$x+1$、$2x-1$ 都能整除 $f(x)$，而 x、$x+1$、$2x+1$ 是两两互质的多项式，故 $x(x+1)(2x+1)\mid f(x)$。证毕

例4 设 $p(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a、b、c、d 为常数，$p(1)=1993$，$p(2)=3986$，$p(3)=5979$。试计算 $\frac{1}{4}[p(11)+p(-7)]$。

分析 注意到 1993，3986，5979 都是 1993 的倍数，所以 $p(x)-1993x$ 有根 $x=1$，2，3。由于 $p(x)$ 是一个 4 次多项式，设第 4 个根为 r，则有 $p(x)-1993x=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$。将 $x=11$ 与 $x=-7$ 代入，即可求解。

解 令 $Q(x)=p(x)-1993x$，则由题设得 $Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$。

又 $Q(x)$ 是一个 4 次多项式，从而可设 $Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$，

故
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}[p(11)+p(-7)]\\
=&\frac{1}{4}[Q(11)+Q(-7)]+1993\\
=&\frac{1}{4}[10\times 9\times 8\times(11-r)+(-8)\times(-9)\times(-10)\times(-7-r)]+1993\\
=&\frac{1}{4}\times 10\times 9\times 8\times 18+1993=5233.
\end{aligned}$$

例5 求一个多项式 $p(x)$，使 $(x^2+1)\mid p(x)$，$(x^3+x^2+1)\mid p(x)+1$。

分析 由题设，$p(x)=(x^2+1)g(x)$，$p(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x)$。于是，有 $(x^3+x^2+1)h(x)-(x^2+1)g(x)=1$。利用辗转相除法求出 $g(x)$ 及 $h(x)$ 即可。

解 由题设，对于所求的 $p(x)$，存在多项式 $g(x)$、$h(x)$，使 $p(x)=(x^2+1)g(x)$，$p(x)+1=(x^3+x^2+1)h(x)$，于是 $(x^3+x^2+1)h(x)-(x^2+1)g(x)=1$。

下面用辗转相除法求 $g(x)$、$h(x)$。首先有

$x^3+x^2+1=(x+1)(x^2+1)+(-x)$，

$x^2+1=(-x)(-x)+1$。

由此向前反推，得
$$\begin{aligned}
1&=(x^2+1)+x(-x)\\
&=(x^2+1)+x[(x^3+x^2+1)-(x+1)(x^2+1)]\\
&=(x^2+1)[1-x(x+1)]+x(x^3+x^2+1)\\
&=(x^3+x^2+1)x-(x^2+1)(x^2+x-1)
\end{aligned}$$
于是可取 $h(x)=x$，$g(x)=x^2+x-1$，所以求得一个 $p(x)=(x^2+1)(x^2+x-1)$。答案并不唯一。

例6 求证 $\log_a x$ 不能表示成 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的形式，这里 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是实系数多项式



分析 用反证法，借助对数的运算法则建立 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系，进而导出矛盾.

证明 反设 $\log_a x=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $\dfrac{f(x^2)}{g(x^2)}=\log_a x^2=2\log_a x=\dfrac{2f(x)}{g(x)}$，

即 $f(x^2)\cdot g(x)=2f(x)\cdot g(x^2)$ ①

不妨设 $(f,g)=1$，于是存在多项式 $u(x)$ 及 $v(x)$，使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$，从而 $u(x^2)f(x^2)+v(x^2)g(x^2)=1$，这说明 $(f(x^2),g(x^2))=1$.

又由①式知 $f(x^2)\mid 2f(x)\cdot g(x^2)$，故 $f(x^2)\mid 2f(x)$，从而 $\deg 2f(x)\geqslant\deg f(x^2)$，这只有 $\deg f(x)=0$ 才有可能，即 $f(x)$ 为常数. 同理，$g(x)$ 也为常数，从而 $\log_a x$ 为常数，矛盾.

例7 如果 $P(x)$ 是一个 n 次多项式，且对 $k=0,1,2,\cdots,n$，有 $P(k)=\dfrac{k}{k+1}$，试确定 $P(n+1)$.

分析 设 $Q(x)=(x+1)\cdot P(x)-x$，则 $Q(x)$ 是一个次数不大于 $n+1$ 的多项式，且当 $x=0,1,2,\cdots,n$ 时，都有 $Q(x)=0$，由因式定理即可得 $Q(x)$ 的表达式.

解 设 $Q(x)=(x+1)\cdot P(x)-x$，由已知条件可知，$Q(x)$ 是一个次数不大于 $n+1$ 的多项式，并且当 $x=0,1,2,\cdots,n$ 时，都有 $Q(x)=0$. 于是，有 $Q(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，其中 a 为常数. 从而 $(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$，令 $x=-1$，得 $1=a\cdot(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!$.

即 $a=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$，于是

$$P(x)=\frac{Q(x)+x}{x+1}=\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x}{x+1}.$$

故 $P(n+1)=\dfrac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}$，即 $P(n+1)=\begin{cases}1, & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{n}{n+2}, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

例8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{100},b_1,b_2,\cdots,b_{100}$ 为互不相同的实数，将它们按如下法则填入 100×100 的方格表，即在位于第 i 行、第 j 列之相交处的方格内填入数 a_i+b_j. 现知道任何一列数的乘积都等于1，求证：任何一行数的乘积都等于 -1.

分析 由列数的乘积都等于1，构造多项式 $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{100})-1$，由题设，知 $f(b_i)=0$，$i=1,2,\cdots,100$. 利用因式定理求解.

证明 构造多项式 $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{100})-1$.

由题设，得 $f(b_i)=0$，$i=1,2,\cdots,100$. 又 $f(x)$ 是首项系数为1的多项式，且 $\deg f(x)=100$，故由因式定理知 $f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{100})$. 于是，有恒等式



$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{100})-1=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{100})$.

在上式中令 $x=-a_i(i=1,2,\cdots,100)$，有 $-1=(-1)^{100}(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_{100})$，即第 $i(i=1,2,\cdots,100)$ 行中所有各数的乘积等于 -1．命题得证．

例 9 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $\mathbf{Q}$ 的两个不同的 n 元子集，已知 $\{a_i+a_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}=\{b_i+b_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$，且对任意 $r\in\{a_i+a_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$，使 $a_i+a_j=r,1\leqslant i<j\leqslant n$ 的 (i,j) 数组的个数和使 $b_i+b_j=r,1\leqslant i<j\leqslant n$ 的 (i,j) 数组的个数相等．求证：n 为 2 的方幂．

分析 不失一般性，可设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为正整数．再构造多项式 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{a_i}$，$g(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{b_i}$，利用题设条件可知

$$(f(x))^2-(g(x))^2=\sum_{i=1}^{n}x^{2a_i}-\sum_{i=1}^{n}x^{2b_i}=f(x^2)-g(x^2),$$

再利用多项式的知识求解．

证明 先不妨设 $a_i,b_j\in\mathbf{Z}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$．事实上，将 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 的公分母乘以各数，代替原来的 $2n$ 个数，仍满足题设条件，故可设 $a_i,b_j\in\mathbf{Z}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$．

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中最小的一个数记为 c，让原来的 $2n$ 个数的每一个减去 $c-1$，所得到的新的数仍满足题设条件，且均为正整数．故不妨设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为正整数．

$a_i,b_j\in\mathbf{N}^*(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n)$ 时，定义 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{a_i}$，$g(x)=\sum_{i=1}^{n}x^{b_i}$，由题设可知 $(f(x))^2-(g(x))^2=\sum_{i=1}^{n}x^{2a_i}-\sum_{i=1}^{n}x^{2b_i}=f(x^2)-g(x^2)$，即

$$(f(x))^2-(g(x))^2=f(x^2)-g(x^2).$$

设 $f(x)-g(x)=(x-1)^k h(x)$，这里 $k>0$，$h(x)$ 为整系数多项式，且 $h(1)\neq 0$．于是 $f(x)+g(x)=\dfrac{f(x^2)-g(x^2)}{f(x)-g(x)}=\dfrac{(x^2-1)^k h(x^2)}{(x-1)^k h(x)}=(x+1)^k\cdot\dfrac{h(x^2)}{h(x)}$．

令 $x=1$，得 $f(1)+g(1)=2^k$，即 $2n=2^k$，$n=2^{k-1}$．原题得证．

例 10 已知多项式 $P(x)=x^k+c_{k-1}x^{k-1}+c_{k-2}x^{k-2}+\cdots+c_1x+c_0$ 整除多项式 $(x+1)^n-1$，其中 k 为偶数，所有的系数 $c_0,c_1,\cdots,c_{k-1}$ 为奇数．求证：$k+1$ 整除 n．

分析 对多项式的系数进行奇偶分析．

证明 我们重新将条件写成 $(x+1)^n-1=P(x)Q(x)$，这里 $P(x)$ 是一个奇系数多项式．

我们称两个整系数多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相似，记作 $f(x)\equiv g(x)$，如果它们同次项



系数的奇偶性相同. 这样,我们有 $(x+1)^n-1=(x^k+x^{k-1}+\cdots+1)Q(x)$ ①

在①式中将 x 换为 $\frac{1}{x}$,再乘以 x^n,得

$$(x+1)^n-x^n=(x^k+x^{k-1}+\cdots+1)x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right) \quad ②$$

在②式中,$x^{n-k}Q\left(\frac{1}{x}\right)$ 是一个次数不超过 $n-k$ 的多项式. ①式减去②式,得

$$x^n-1=(x^k+x^{k-1}+\cdots+1)R(x).$$

这里 $R(x)$ 是一个整系数多项式.

如果 $k+1$ 不整除 n,设 $n=q(k+1)+r$, $0<r<k+1$,由多项式 $x^{k+1}-1=(x^k+x^{k-1}+\cdots+1)(x-1)$ 整除多项式 $x^n-x^r=x^r(x^{q(k+1)}-1)$,推出 $x^r-1=(x^n-1)-(x^n-x^r)=(x^k+x^{k-1}+\cdots+1)R_1(x)$,这里 $R_1(x)$ 是一个整系数多项式. 不难看出,这不可能,因为多项式 x^r-1 的次数不高于多项式 $x^k+x^{k-1}+\cdots+1$ 的次数,也就是它们不相似. 故 $k+1$ 整除 n.



思考交流

思考题1 已知 $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$,求 $u(x)$ 与 $v(x)$,使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$.

解 利用辗转相除法,可得

$$f(x)=g(x)\cdot 2x+(-6x^2-3x+9) \quad ①$$

$$g(x)=(-6x^2-3x+9)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)+(-x+1) \quad ②$$

因为 $-6x^2-3x+9=(-x+1)(6x+9)$.

故 $(f(x),g(x))=x-1$.

对②式移项,代入①式有 $(f(x),g(x))=x-1$

$$=(-6x^2-3x+9)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-g(x)$$

$$=[f(x)-2xg(x)]\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-g(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)f(x)+\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)g(x)$$

故得 $u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$, $v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$



思考题2 求证：每个多项式 $f(x)$ 都可以唯一地表为 $x-x_0$ 的多项式，亦即存在唯一的多项式 $g(y)$，使 $f(x)=g(x-x_0)$。

求证 设 $f(x)$ 为 n 次多项式，用 $x-x_0$ 除 $f(x)$，再用 $x-x_0$ 逐次除所得的商，设为

$f(x)=q_1(x)(x-x_0)+r_0$

$q_1(x)=q_2(x)(x-x_0)+r_1$

$\vdots$ ①

$q_{n-2}(x)=q_{n-1}(x)(x-x_0)+r_{n-2}$

$q_{n-1}(x)=r_n(x-x_0)+r_{n-1}$

将 $q_1(x)$，$q_2(x)$，…，$q_{n-1}(x)$ 逐次代入 $f(x)$ 中，则得

$$\begin{aligned}f(x)&=q_2(x)(x-x_0)^2+r_1(x-x_0)+r_0\\&=q_3(x)(x-x_0)^3+r_2(x-x_0)^2+r_1(x-x_0)+r_0\\&=\cdots=q_{n-1}(x)(x-x_0)^{n-1}+r_{n-2}(x-x_0)^{n-2}+\cdots+r_1(x-x_0)+r_0\\&=r_n(x-x_0)^n+r_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots+r_1(x-x_0)+r_0.\end{aligned}$$

即 $g(y)=r_ny^n+r_{n-1}y^{n-1}+\cdots+r_1y+r_0$.

设另有 $f(x)=k_n(x-x_0)^n+k_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+\cdots+k_1(x-x_0)+k_0$ ②

则由①、②式知 $f(x_0)=k_0=r_0$，于是由②式得

$$f(x)-r_0=[k_n(x-x_0)^{n-1}+k_{n-1}(x-x_0)^{n-2}+\cdots+k_2(x-x_0)+k_1](x-x_0).$$

此式与①中第一式比较，得 $q_1(x)=k_n(x-x_0)^{n-1}+k_{n-1}(x-x_0)^{n-2}+\cdots+k_2(x-x_0)+k_1$；

此式与①中第二式比较，得 $k_1=r_1$.

如此继续下去，有 $k_i=r_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

即 $f(x)$ 表为 $x-x_0$ 的多项式是唯一的。

同步检测 7

1. 设 $f(x)=x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$，求 $f(x^{100})$ 除以 $f(x)$ 所得的余数.

2. a，b，c 取何值时，多项式 x^4+ax^2+bx+c 被 $(x-1)^3$ 除尽？

3. 设 a，b，c 是三个不同的实数，$p(x)$ 是实系数多项式. 已知：

(1) $p(x)$ 除以 $x-a$ 得余数 a；

(2) $p(x)$ 除以 $x-b$ 得余数 b；

(3) $p(x)$ 除以 $x-c$ 得余数 c



求多项式 $p(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得的余式。

4. 求证：多项式 $g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$ 能整除 $f(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$ 的充分必要条件是 n 为偶数.

5. 求证：多项式 $g(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{[illegible]}$ 不能整除多项式 $f(x)=$ [illegible] $+x^4+x^8+\cdots+x^{[illegible]}$.

6. 设 $f(x)=x^4+3x^3+x^2-1$，$g(x)=x^4-x^3+x^2+2$，求 $(f(x), g(x))$.

7. 设多项式 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$，$S(x)$ 满足 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4-x^3+x^2-x+1)S(x)$，求证：$(x+1)\mid P(x)$.

8. 设 m 为大于 1 的正整数，三个非零实系数多项式 $f_j(x)=a_jx+b_j$，$j=1,2,3$，满足 $[f_1(x)]^m+[f_2(x)]^m=[f_3(x)]^m$. 求证：存在常数 c_j $(j=1,2,3)$ 及多项式 $q(x)\in\mathbf{R}[x]$，使得 $f_j(x)=c_jq(x)$，$j=1,2,3$.

9. 设 $f(x)\in\mathbf{Z}[x]$，定义：$f^{(n)}(x)=f(f^{(n-1)}(x))$，求证：$a\in\mathbf{Z}$ 满足 $f^{(2008)}(a)=a$ 的充分必要条件是 $f(a)=a$.

10. 设 $p(x)$ 是非常数的整系数多项式，$n(p)$ 表示满足 $(p(x))^2=1$ 的所有不同整数 x 的个数. 求证：$n(p)-\deg p(x)\leqslant 2$.

11. 给出一个集合 M，它由 7 个连续的自然数所组成，而且存在一个五次多项式 $p(x)$，使得：

(1) 多项式 $p(x)$ 的每个系数都是整数；

(2) 在 M 中有包含它的最大数和最小数在内的 5 个数满足 $p(k)=k$；

(3) 存在 $k\in M$，满足 $p(k)=0$.

第[illegible]讲　多项式的根

知识点金

对任意多项式 $f(x)\in K[x]$，$\alpha\in\mathbf{C}$，如果 $f(\alpha)=0$，则称 α 为 $f(x)$ 的根.

下面，我们不加证明地列出与多项式的根有关的定理.

代数基本定理　任意一个次数不小于 1 的多项式至少有一个复数根.

根的个数定理　任意一个 $n(n\geq 1)$ 次的多项式恰有 n 个复根，其中 k 重根按 k 个根计算.

推论 1　在复数范围内，n 次多项式 $f(x)$ 可唯一分解为

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个复根.

推论 2　若有 $n+1$ 个不同的复数，使得两个次数不超过 n 的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的值均相等，则 $f(x)\equiv g(x)$.

推论 3　若多项式 $f(x)$ 有无数多个不同的根，则 $f(x)$ 为零多项式.

许多与多项式有关的问题都需从多项式的根出发进行分析，多项式的根与系数之间存在着很密切的联系. 下面的一些结论为研究多项式问题提供了一些出发点.

韦达定理　若 n 次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$ 的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则有如下关系式成立.



$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sum\limits_{1\le i<j\le n} x_ix_j=\dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \cdots \\ \sum\limits_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=(-1)^k\cdot\dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \cdots \\ \prod\limits_{i=1}^{n} x_i=(-1)^n\cdot\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

实系数多项式虚根成对定理 设 $P(x)\in\mathbf{R}[x]$，且 $P(\alpha)=0$，则 $P(\bar{\alpha})=\overline{P(\alpha)}=0$，即若 α 是实系数多项式 $P(x)$ 的虚根，则其共轭虚数 $\bar{\alpha}$ 也是 $P(x)$ 的根，且它们的重数相等.

实系数多项式因式分解定理 任意一个 n 次实系数多项式 $f(x)$ 都可以表示为

$$f(x)=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_m)(x^2+2b_1x+c_1)\cdots(x^2+2b_lx+c_l).$$

如果不计因式的书写顺序，这种表示是唯一的，其中 $m,l\in\mathbf{N}$，$m+2l=n$；x_1，x_2，$\cdots$，x_m 是 $f(x)$ 的全部实根，而 b_1，$\cdots$，b_l，c_1，$\cdots$，$c_l\in\mathbf{R}$，且二次三项式

$$x^2+b_1x+c_1,\cdots,x^2+b_lx+c_l$$

都没有实根，即 $b_1^2<c_1$，$\cdots$，$b_l^2<c_l$.

推论 奇数次实系数多项式至少有一个实根.

整系数多项式有理根判定定理 设 $\dfrac{q}{p}\left(\dfrac{q}{p}\neq 0\right)$ 是整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的有理根，其中 p，$q\in\mathbf{Z}$，$(p,q)=1$，则 $p\mid a_n$，$q\mid a_0$.

特别地，首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)$ 的有理根均为整数

例题精析

例 1 设多项式 $ax^n-ax^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x^2-n^2bx+b$ 恰有 n 个正根，证明：它所有的根都相等

分析 由韦达定理可得 n 个正根与系数之间的关系，再结合平均值不等式证明之.

证明 设原多项式的 n 个正根分别为 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，显然它的次数不小于 n，故 $a\neq 0$ 于是，由韦达定理可得



$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1,$$

$$\sum_{i=2}^{n}x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n+x_2x_3\cdots x_n=(-1)^n\cdot n^2\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\cdot\frac{b}{a}.$$

由此,可得 $b\neq 0$. 由平均值不等式,得

$$n^2=1\cdot\frac{(-1)^n\cdot n^2\dfrac{b}{a}}{(-1)^n\cdot\dfrac{b}{a}}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$\geqslant(n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})\cdot\left(n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}}\right)=n^2$$

上式等号成立,故只能 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$. 因此,结论成立.

例2 求所有以有理数 a, b, c 为根的三次多项式 x^3+ax^2+bx+c.

分析 依据韦达定理,可将原问题转化为求解关于 a, b, c 的三元方程组. 同时,解高次方程时,注意整系数多项式有理根判定定理的运用.

解 依据韦达定理,a, b, c 应满足

$$\begin{cases}a+b+c=-a & ①\\ ab+bc+ca=b & ②\\ abc=-c & ③\end{cases}$$

若 $c=0$, 则由 ①, ② 得 $\begin{cases}2a+b=0\\ ab=b\end{cases}$

解得 $a=0$, $b=0$ 或 $a=1$, $b=-2$.

当 $c\neq 0$, 则由 ③ 得 $b=-\frac{1}{a}$. 代入 ①, ②, 并消去 a, 可得 $b^4+b^3-2b^2+2=0$.

由整系数多项式有理根判定定理知,此方程的有理根只可能为 ±1, ±2. 经检验,此方程有且仅有一个有理根 $b=-1$, 从而 $a=1$, $c=-1$.

综上所述,所求的三次多项式为 x^3, x^3+x^2-2x, x^3+x^2-x-1.

例3 证明:不存在一个次数为998次的实系数多项式 $P(x)$, 使得对任意的 $x\in\mathbf{C}$, 均有 $P(x)^2-1=P(x^2+1)$ ①.

分析 假设存在满足条件 ① 的多项式 $P(x)$, 构造多项式 $Q(x)=P(x)-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (这里 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是方程 $t^2-1=t$ 的根), 从而 $Q(x)$ 满足 $Q(x)[Q(x)+1+\sqrt{5}]=Q(x^2+1)$. 再从 $Q(x)$ 的根出发,用迭代递推的方法得到 $Q(x)$ 的无穷多个实根,产生

矛盾.

证明 用反证法. 假设存在满足条件的多项式 $P(x)$, 并设

$$P(x)=a_{998}x^{998}+a_{997}x^{997}+\cdots+a_1x+a_0(a_{998}\neq 0).$$

利用①式, 比较两边多项式的系数, 得 $a_{997}=a_{995}=\cdots=a_1=0$.
于是 $P(x)$ 是一个偶函数.

令 $Q(x)=P(x)-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$(这里 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是方程 $x^2-1=x$ 的根), 则 $Q(x)$ 也是998次的偶函数, 且满足 $Q(x)[Q(x)+1+\sqrt{5}]=Q(x^2+1)$. ②

设 $Q(x)=R(x^2)$, 则 $R(x)$ 是一个499次实系数多项式, 于是由实系数多项式因式分解定理的推论, 可知 $R(x)$ 有一个实根, 从而存在 a, 使 $a^2\in\mathbf{R}$, 且 $Q(a)=0$. 这样, 由②知 a^2+1 也是 $Q(x)$ 的实根. 依②式不断迭代, 可知

$$a^2+1<(a^2+1)^2+1<((a^2+1)^2+1)^2+1<\cdots$$

上面不等式中每一个数都是 $Q(x)$ 的实根, 所以 $Q(x)$ 有无穷多个实根, 这只能是 $Q(x)\equiv 0$, 与 $Q(x)$ 为998次多项式矛盾.

所以, 不存在满足条件的多项式 $P(x)$.

例4 已知 $P(z)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ 是复变量 z 的实系数多项式. 若 $|P(\mathrm{i})|<1$, 证明: 存在实数 a, b, 使得 $P(a+b\mathrm{i})=0$, 且 $(a^2+b^2+1)^2<4b^2+1$.

分析 设 $P(z)=(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)$, 由 $|P(\mathrm{i})|<1$, 易证明 $P(z)$ 有虚根, 再由实系数多项式虚根成对定理即可完成证明.

证明 设 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是多项式 $P(z)$ 的 n 个根, 那么 $P(z)=(z-r_1)(z-r_2)\cdots(z-r_n)$. 由题设 $|P(\mathrm{i})|<1$, 知 $|\mathrm{i}-r_1|\cdot|\mathrm{i}-r_2|\cdots|\mathrm{i}-r_n|<1$. 因为对于实数 r, $|\mathrm{i}-r|=\sqrt{1+r^2}\geqslant 1$, 所以 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 中一定有非实根, 设其为 r_k. 由于 $P(z)$ 是实系数多项式, 由虚根成对定理, 知 $\overline{r_k}$ 也是 $P(z)$ 的根, 且使得 $|\mathrm{i}-r_k|\cdot|\mathrm{i}-\overline{r_k}|<1$.

令 $r_k=a+b\mathrm{i}$, $a, b\in\mathbf{R}$, 则 $P(a+b\mathrm{i})=0$, 且

$$\begin{aligned}1&>|\mathrm{i}-(a+b\mathrm{i})|\cdot|\mathrm{i}-(a-b\mathrm{i})|\\&=\sqrt{a^2+(1-b)^2}\cdot\sqrt{a^2+(1+b)^2}\\&=\sqrt{a^2+b^2+1-2b}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1+2b}=\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4b^2}.\end{aligned}$$

所以 $(a^2+b^2+1)^2<4b^2+1$.

例5 已知 $f(x)$, $g(x)$ 为两个实系数多项式, 且对一切实数 x, 恒有 $f(g(x))=g(f(x))$. 求证: 若方程 $f(x)=g(x)$ 无实根, 则方程 $f(f(x))=g(g(x))$ 亦无



实根

分析 由于 $f(g(x))=g(f(x))$，所以方程 $f(f(x))=g(g(x))$ 即

$$[f(f(x))-g(f(x))]+[f(g(x))-g(g(x))]=0.$$

由实系数多项式因式分解定理，可给出多项式 $f(x)-g(x)$ 的表达式，进而可得 $f(f(x))-g(f(x))$ 及 $f(g(x))-g(g(x))$，从而获证.

证明 因为方程 $f(x)=g(x)$ 无实根，所以实系数多项式 $f(x)-g(x)$ 在实数范围内可分解为 $f(x)-g(x)=A\cdot\prod_{i=1}^{m}[(x-a_i)^2+b_i^2]$ ①，
其中 $b_i\neq 0$，$1\leqslant i\leqslant m$.

不妨设 $A>0$，在 ① 式中分别以 $f(x)$，$g(x)$ 代入，得

$$\begin{cases}f(f(x))-g(f(x))=A\cdot\prod_{i=1}^{m}[(f(x)-a_i)^2+b_i^2]\\ f(g(x))-g(g(x))=A\cdot\prod_{i=1}^{m}[(g(x)-a_i)^2+b_i^2]\end{cases}$$

两式相加，并利用 $f(g(x))=g(f(x))$，得

$$f(f(x))-g(g(x))=A\cdot\prod_{i=1}^{m}[(f(x)-a_i)^2+b_i^2]+A\cdot\prod_{i=1}^{m}[(g(x)-a_i)^2+b_i^2].$$

由于对任意的 $x\in\mathbb{R}$，有 $f(x)$，$g(x)\in\mathbb{R}$，于是

$$A\cdot\prod_{i=1}^{m}[(f(x)-a_i)^2+b_i^2]>0,$$

$$A\cdot\prod_{i=1}^{m}[(g(x)-a_i)^2+b_i^2]>0,$$

所以 $f(f(x))-g(g(x))>0$，故方程 $f(f(x))=g(g(x))$ 无实根.

例 6 实数 a，b，c 和正数 λ，使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实数根 x_1，x_2，x_3，且满足(1) $x_2-x_1=\lambda$；(2) $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，求 $\frac{2a^3+27c+9ab}{\lambda^3}$ 的最大值.

解法 1 设 $x_1=m-\frac{\lambda}{2}$，$x_2=m+\frac{\lambda}{2}$，则 $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)=m$，
令 $x_3=m+t$，$t>0$. 由韦达定理知

$$\begin{cases}a=-(x_1+x_2+x_3)=-(3m+t)\\ b=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3m^2+2mt-\frac{\lambda^2}{4}\\ c=-x_1x_2x_3=-m^3-m^2t+\frac{\lambda^2}{4}m+\frac{\lambda^2}{4}t\end{cases}$$



于是 $2a^3-9ab=a(2a^2-9b)=27m^3+27m^2t-\frac{27}{2}m\lambda^2-\frac{9}{4}\lambda^2t-2t^3$,

$$27c=-27m^3-27m^2t+\frac{27}{4}m\lambda^2+\frac{27}{4}\lambda^2t.$$

所以 $S=\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{9\lambda^2t-4t^3}{2\lambda^3}$

由于 $\lambda>0$ 且要求 S 的最大值,故不妨设 $9\lambda^2-4t^2>0$。

于是 $S=\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{(9\lambda^2-4t^2)(9\lambda^2-4t^2)\cdot 8t^2}$

$$\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\cdot\sqrt{\left[\frac{2(9\lambda^2-4t^2)+8t^2}{3}\right]^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

当且仅当 $9\lambda^2-4t^2=8t^2$ 即 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$(此时 $9\lambda^2-4t^2>0$)时等号成立.

此时如设 $m=0$, $\lambda=2$, 则 $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=\sqrt{3}$.

故当 $a=-c=-\sqrt{3}$, $b=-1$ 时, S 取最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

解法2 令 $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+t\ (t>0)$,由韦达定理知

$$\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$$

$$=\frac{-2(x_1+x_2+x_3)^3-27x_1x_2x_3+9(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{\lambda^3}$$

$$=\frac{(x_1+x_2-2x_3)(x_2+x_3-2x_1)(x_3+x_1-2x_2)}{\lambda^3}$$

$$=\frac{t(2t+3\lambda)(3\lambda-2t)}{2\lambda^3}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{(9\lambda^2-4t^2)(9\lambda^2-4t^2)\cdot 8t^2}\ (\text{不妨设 }9\lambda^2-4t^2>0)$$

$$\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{\left[\frac{2(9\lambda^2-4t^2)+8t^2}{3}\right]^3}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

等号在 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ 时取到. 此时取 $x_2>x_1$,令 $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_1)$,

则有 $a=-\frac{3}{2}(x_1+x_2)-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_1)$.

$$b=\frac{(x_1+x_2)^2+\sqrt{3}(x_2^2-x_1^2)}{2}+x_1x_2,$$

$$c=\frac{-x_1x_2(x_1+x_2)-\sqrt{3}x_1x_2(x_2-x_1)}{2}$$

故 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

解法 3 注意到原式的分子

$$\begin{aligned}2a^3+27c-9ab&=27\left[\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)+c\right]\\&=27f\left(-\frac{a}{3}\right)=27\left(-\frac{a}{3}-x_1\right)\left(-\frac{a}{3}-x_2\right)\left(-\frac{a}{3}-x_3\right)\\&=(-a-3x_1)(-a-3x_2)(-a-3x_3)\end{aligned}$$

而 $-a=x_1+x_2+x_3$，则

$$原式的分子=(x_2+x_3-2x_1)(x_1+x_3-2x_2)(x_1+x_2-2x_3).$$

令 $x_2=x_1+2m$，$x_3=x_1+m+n$，其中 $m>0$，$n>0$，则

$$原式的分子=(3m+n)(3m-n)\cdot 2n=2n(9m^2-n^2).$$

$$则原式=\frac{1}{4}\left[9\left(\frac{n}{m}\right)-\left(\frac{n}{m}\right)^3\right].$$

令 $\frac{n}{m}=t$，$t>0$，则原式 $=\frac{1}{4}(9t-t^3)$.

设 $g(t)=9t-t^3$，$t>0$ 易证得 $g(t)$ 在 $(0,\sqrt{3}]$ 上为增函数，在 $[\sqrt{3},+\infty)$ 上为减函数．故当 $t=\sqrt{3}$ 时，$g(t)$ 取最大值 $6\sqrt{3}$．此时，原式有最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$（易知最大值可以取到）

例 7 设实系数多项式 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根为实数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，其中 $n\geq 2$．证明：对于 $x>\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，有

$$f(x+1)\geq\frac{2n}{\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}}$$

分析 由于 $f(x+1)=(1+x-b_1)(1+x-b_2)\cdots(1+x-b_n)$，且由平均值不等式可得 $\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}}$，于是要证原不等式，只需证明 $\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}\geq 2n$，$i=1,2,\cdots,n$ 这里 $x-b_i>0$，$n\geq 2$

证明 首先，可以知道，对任意实数 $t>0$，有



$\frac{n(n-1)}{2}t^2-nt+1\geqslant 0$(这里因为当 $n\geqslant 2$ 时，$n^2-2n(n-1)\leqslant 0$). 从而有

$$(1+t)^n\geqslant 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2\geqslant 2nt \qquad ①.$$

因为 $f(x)$ 是首项系数为 1 的多项式，所以

$$f(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n).$$

当 $x>\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 时，有

$$f(x+1)=(1+x-b_1)(1+x-b_2)\cdots(1+x-b_n)>0,$$

于是由平均值不等式，知 $f(x+1)\left(\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}\right)$

$$\geqslant nf(x+1)\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}}$$

$$=n\cdot\sqrt[n]{\frac{(1+x-b_1)^n(1+x-b_2)^n\cdots(1+x-b_n)^n}{(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)}}.$$

由①式得 $\frac{(1+x-b_i)^n}{x-b_i}\geqslant 2n$，$i=1,2,\cdots,n$，所以

$$f(x+1)\left(\frac{1}{x-b_1}+\frac{1}{x-b_2}+\cdots+\frac{1}{x-b_n}\right)\geqslant 2n^2.$$

故命题成立.

例 8 试求所有满足下列条件的实系数多项式 $f(x)$：

(1) $f(x)=a_0x^{2n}+a_2x^{2n-2}+\cdots+a_{2n-2}x^2+a_{2n}$，$a_0>0$；

(2) $\sum_{j=0}^{n}a_{2j}a_{2n-2j}\leqslant C_{2n}^{n}a_0a_{2n}$；

(3) $f(x)$ 的 $2n$ 个根都是纯虚数.

分析 记 $g(t)=a_0t^n-a_2t^{n-1}+\cdots+(-1)^ja_{2j}t^{n-j}+\cdots+(-1)^na_{2n}$，则 $f(x)=(-1)^ng(-x^2)$. 设 $\pm i\beta_1,\pm i\beta_2,\cdots,\pm i\beta_n$ 是多项式 $f(x)$ 的 $2n$ 个纯虚数根，则多项式 $g(t)$ 的 n 个根为 $t_j=\beta_j^2>0$，$j=1,2,\cdots,n$. 再利用韦达定理及重要不等式求解.

解 首先记 $g(t)=a_0t^n-a_2t^{n-1}+\cdots+(-1)^ja_{2j}t^{n-j}+\cdots+(-1)^na_{2n}$，则

$$f(x)=(-1)^ng(-x^2).$$

设 $\pm i\beta_1,\pm i\beta_2,\cdots,\pm i\beta_n$ 是多项式 $f(x)$ 的 $2n$ 个根(不妨设 $\beta_j>0$，$j=1,2,\cdots,n$)，则多项式 $g(t)$ 的 n 个根为 $t_j=\beta_j^2>0$，$j=1,2,\cdots,n$. 由韦达定理知

$$\frac{a_{2j}}{a_0}=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n}t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}，j=1,2,\cdots,n.$$

(在下面几行式子中，符号 $\sum$ 下方未标出的求和范围都是 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant n$.)
由柯西不等式，对 $j=1,2,\cdots,n$ 均有

$$(C_n^j)^2\frac{a_{2n}}{a_0}=\left[\sum\sqrt{t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{a_{2n}}{a_0}}}{\sqrt{t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}}}\right]^2$$

$$\leqslant\left(\sum t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}\right)\left[\sum\frac{\frac{a_{2n}}{a_0}}{t_{k_1}t_{k_2}\cdots t_{k_j}}\right]=\frac{a_{2j}}{a_0}\cdot\frac{a_{2n-2j}}{a_0} \qquad ①$$

注意到 $C_{2n}^n\frac{a_{2n}}{a_0}=\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2\frac{a_{2n}}{a_0}$，并由①及条件(2)，可得

$$C_{2n}^n\frac{a_{2n}}{a_0}=\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2\frac{a_{2n}}{a_0}\leqslant\sum_{j=0}^{n}\frac{a_{2j}}{a_0}\cdot\frac{a_{2n-2j}}{a_0}\leqslant C_{2n}^n\frac{a_{2n}}{a_0} \qquad ②$$

由②式看出，对于 $j=1,2,\cdots,n$，在①式中等号均成立. 根据柯西不等式及等号成立的条件，可知 $t_1=t_2=\cdots=t_n$.

将这个正数记为 r^2，则 $\frac{a_{2j}}{a_0}=C_n^jr^{2j}$，即 $a_{2j}=a_0C_n^jr^{2j}$，$j=1,2,\cdots,n$.

于是 $f(x)=a_0(x^2+r^2)^n(a_0>0,r>0)$.
易验证，这样的多项式 $f(x)$ 满足题设的全部条件.

例9 给定复系数多项式 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$. 试证：存在复数 z_0，适合 $|z_0|\leqslant1$ 且 $|f(z_0)|\geqslant|c_0|+|c_n|$.

分析 由 $f(z)$ 构造新的多项式，使其所有根的积的模为1，再证明其中模最小的根满足条件.

证明 分两种情形讨论.

当 $c_n\neq0$ 时，构造多项式 $g(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z-\left|\frac{c_0}{c_n}\right|\cdot c_n$. 由代数基本定理，$g(z)$ 有 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，将其模排序为 $|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|$.
又由韦达定理知 $|z_1z_2\cdots z_n|=1$，故 $|z_1|\leqslant1$，且

$$f(z_1)=c_0z_1^n+c_1z_1^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_1+c_n=g(z_1)+\left|\frac{c_0}{c_n}\right|\cdot c_n+c_n=c_n\left(\left|\frac{c_0}{c_n}\right|+1\right),$$

所以 $|f(z_1)|=|c_0|+|c_n|$.

当 $c_n=0$ 时，构造多项式 $g(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z-c_0$.
由代数基本定理，$g(z)$ 有 n 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，按模排序为 $|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots\leqslant|z_n|$.
由韦达定理知 $|z_1z_2\cdots z_n|=1$，故 $|z_1|\leqslant1$，且

$$f(z_1)=c_0z_1^n+c_1z_1^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_1=g(z_1)+c_0=c_0,$$



所以 $|f(z)| = |c_0| = |c_0+1|$.

例 10 求最大整数 n，使方程 $(z+1)^n = z^n + 1$ 的所有非零解都在单位圆上.

证明 为证本题，需要下面的引理.

引理 设实系数一元 n 次方程 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ ($n \geqslant 1$，$a_na_0 \neq 0$) 的根为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 令 $\Delta_1 = (n-1)a_{n-1}^2 - 2na_{n-2}a_n$，$\Delta_2 = (n-1)a_1^2 - 2na_2a_0$，则

(1) 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是实数时，$\Delta_1 \geqslant 0$ 且 $\Delta_2 \geqslant 0$；

(2) 当 $\Delta_1 < 0$ 或 $\Delta_2 < 0$ 时，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为实数.

引理证明 事实上，由韦达定理得 $\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$，$\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$，

于是
$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j \\
&= (n-1)\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big)^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j\Big] - 2\sum_{1\le i<j\le n} x_ix_j \\
&= (n-1)\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2n\cdot\frac{a_{n-2}}{a_n} = \frac{\Delta_1}{a_n^2},
\end{aligned}
$$
即 $\Delta_1 = I_1 \cdot a_n^2$.

令 $y = \frac{1}{x}$，则原方程可化为 $a_0y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}y + a_n = 0$，此方程的根为 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}$，类似地，有 $I_2 = \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_j}\right)^2 = \frac{\Delta_2}{a_0^2}$，

即 $\Delta_2 = a_0^2 \cdot I_2$.

所以，当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是实数时，$\Delta_1 \geqslant 0$ 且 $\Delta_2 \geqslant 0$，结论(1) 成立.

由于结论(1)、(2)互为逆否命题，故结论(2)也成立.

下面我们来解答原题：

利用二项式定理，将方程化为

$$z(C_n^1z^{n-2} + C_n^2z^{n-3}) + (C_n^3z^{n-4} + \cdots + C_n^{n-2}z + C_n^{n-1}) = 0\ (n > 3).$$

记方程的非零解为 z_i ($i = 1, 2, \cdots, n-2$)，由韦达定理得

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n-2} z_i = -\frac{C_n^2}{C_n^1} = -\frac{n-1}{2},$$

$$S_2 = \sum_{1\le i<j\le n-2} z_iz_j = \frac{C_n^3}{C_n^1} = \frac{1}{6}(n-1)(n-2).$$

设 $n \geqslant 4$ 满足题设条件，则 $z_i\cdot\bar{z}_i = |z_i|^2 = 1$，$z_i + \bar{z}_i$ 为实数 ($i = 1, 2, \cdots, n-2$). 由于方程的系数都是实数，其根以共轭复数的形式成对出现，于是方程的非零解

又可表示成 $z_i+\bar{z}_i$（$i=1,2,\cdots,n-2$）.

因此 $t_1=\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n-2}(z_i+\bar{z}_i)=2S_1=1-n$,

$$t_2=\sum_{i<j}x_ix_j=\frac{1}{2}\left(t_1^2-\sum_{i=1}^{n-2}x_i^2\right)$$

而 $\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n-2}(z_i^2+\bar{z}_i^2+2z_i\bar{z}_i)=2\sum\limits_{i=1}^{n-2}z_i^2+2\sum\limits_{i=1}^{n-2}1=2(S_1^2-2S_2)+2(n-2)$,

所以 $t_2=\frac{1}{2}[(2S_1)^2-2(S_1^2-2S_2)-2(n-2)]=\frac{1}{12}(7n^2-30n+35)$.

由韦达定理，实数 x_i（$i=1,2,\cdots,n-2$）是实系数方程 $x^{n-2}-t_1x^{n-3}+t_2x^{n-4}+\cdots+t_{n-3}x+t_{n-2}=0$ 的 $n-2$ 个根，利用引理(1)，有 $\Delta_2=(n-3)(-t_1)^2-2(n-2)t_2\geqslant 0$，即

$(n-3)(n-1)^2-2(n-2)\cdot\frac{7n^2-30n+35}{12}\geqslant 0$，解得 $n\leqslant 5+\sqrt{12}<9$，即 $n\leqslant 8$.

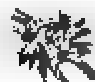
当 $n=8$ 时，方程化为 $(8z^6+28z^5+56z^4+70z^3+56z^2+28z+8)z=0$.
其非零解是下列方程 $4z^6+14z^5+28z^4+35z^3+28z^2+14z+4=0$　（*）
的 6 个根. 而方程（*）可变形为 $4(z^3+z^{-3})+14(z^2+z^{-2})+28(z+z^{-1})+35=0$,

即　$4(z+z^{-1})^3+14(z+z^{-1})^2+16(z+z^{-1})+7=0$.

由于 $\Delta_2=(3-1)\cdot16^2-2\cdot3\cdot14\cdot7=-76<0$，由引理(2)知，方程 $4x^3+14x^2+16x+7=0$ 的根不全为实数，即存在方程（*）的根 z_i 使 $z_i+z_i^{-1}$ 不是实数. 于是 $z_i+z_i^{-1}\neq\bar{z}_i+\bar{z}_i^{-1}$，即 $|z_i|\neq 1$. 故 $n=8$ 不满足题设条件.

当 $n=7$ 时，方程可化为 $7(z+1)z(z^2+z+1)^2=0$. 其非零解为 -1 和 $e^{\pm\frac{2\pi}{3}i}$，都在单位圆上.

综上所述，满足题设条件的最大整数 n 为 7.



思考交流

思考题　设 $n\geqslant 4$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$；$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是两组实数，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2<1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i^2<1$，记 $A^2=1-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2$，$B^2=1-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i^2$，$W=\frac{1}{2}(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i)^2$. 求出一切实数 λ，使得方程 $x^n+\lambda(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^3+Wx^2+ABx+1)=0$ 仅有实数根.



证明 当$\lambda=0$时，方程仅有实根0.

当$\lambda\neq0$时，$\Delta_2=(n-1)(\lambda AB)^2-2n(\lambda W)\lambda=\lambda^2[(n-1)A^2B^2-2nW]$.

由 $1-\sqrt{2W}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\alpha_i^2+\beta_i^2)=\frac{2-A^2-B^2}{2}$，

得 $\sqrt{2W}\geqslant\frac{A^2+B^2}{2}\geqslant AB$. 所以，$2W\geqslant A^2B^2$. 故

$$\Delta_2\leqslant\lambda^2[2(n-1)A^2B^2-2nA^2B^2]=-2A^2B^2\lambda^2<0.$$

由例10引理(2)知，方程的根不全为实数.

综上所述，只能是$\lambda=0$.

同步检测 8

1. 已知自然数$m\geqslant2$，求出所有满足$P[P(x)]=P^m(x)$的多项式.

2. 设$P(x)$是整系数多项式. 证明：如果$Q(x)=P(x)+12$至少有6个不同的整数根，那么$P(x)$没有整数根.

3. 求满足$xf(x-1)=(x-98)f(x)$的多项式$f(x)$.

4. 设多项式$f(x)=a_{2005}x^{2005}+a_{2004}x^{2004}+\cdots+a_3x^3+2x^2+x+1$，求证：$f(x)$至少有一个根为虚根.

5. 求一切实数P，使得三次方程$5x^3-5(P+1)x^2+(71P-1)x+1=66P$的三个根均为自然数.

6. 设$f(x)$为三次多项式，r_1，r_2，r_3为$f(x)$的根，如果$\frac{f(\frac{1}{2})+f(-\frac{1}{2})}{f(0)}=1003$，试求$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}$的值.

7. 设复系数多项式$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\,(a_0a_n\neq0)$的所有根的模都小于1，求证：多项式$g(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+\lambda\bar{a}_{n-k})x^k$的所有根的模都等于1，其中$|\lambda|=1$.

8. 设a_1，a_2，…，a_n是非负实数，且不全为零.

(1) 证明：方程$x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0$恰有一个正实根；

(2) 令$A=\sum_{j=1}^{n}a_j$，$B=\sum_{j=1}^{n}ja_j$，并设R是上述方程的正实根. 证明：$A^A\leqslant R^B$.

9. 设$n(n\geqslant2)$为正整数. 求所有的实系数多项式$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，使

得 $P(x)$ 恰有 n 个不大于 -1 的实根，且 $a_0 - a_1 a_n = a_n - a_1 a_0$．

10　设 $f(x)$ 是整系数多项式，并且 $f(x)=1$ 有整数根．约定将所有满足上述条件的 f 组成的集合记为 F．对于任意给定的整数 $k>1$，求最小的整数 $m(k)>1$，要求能保证存在 $f\in F$，使得 $f(x)=m(k)$ 恰有 k 个互不相同的整数根．



第[illegible]讲　多项式的插值与差分

知识点穴

1. 拉格朗日插值公式

设 $f(x)$ 是一个次数不超过 n 的多项式，$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 是 $n+1$ 个不同的数，则 $f(x)$ 可唯一地表示为

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})} f(a_1) \\ & + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_{n+1})} f(a_2) \\ & + \cdots + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\cdots(a_{n+1}-a_n)} f(a_{n+1}). \end{aligned}$$

利用多项式恒等定理可证该公式.

这个公式称为拉格朗日插值公式.它表明对任意一个 n 次多项式，只要知道它在 $n+1$ 个点上的取值，就能确定这个多项式，并且可由这个公式直接写出其表达式.插值公式的这一性质使它在多项式中应用极为广泛.

2. 多项式的差分

差分是数学中一个解决问题的重要工具.由于多项式是一种特殊的函数，所以，我们先介绍一般函数的差分概念和性质.

设 $f(x)$ 是一个函数，称 $f(x+1)-f(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一阶差分，记作 $\Delta f(x)$（或 Δf）.把函数 f 的 k 阶差分的一阶差分称为函数 f 的 $k+1$ 阶差分（$k=1, 2, \cdots, n$）.$f(x)$ 的 k 阶差分记作 $\Delta^k f(x)$（或 $\Delta^k f$），于是 $\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f)$.

对于函数 $f(x)$，$g(x)$，由差分的定义，易知：

1. $\Delta(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \Delta f(x) + \mu \Delta g(x)$，其中 λ，μ 为常数；

(2) $\Delta(f(x)g(x)) = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x) = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$

我们有下面的公式

定理 设 $f(x)$ 是一个函数，则

(1) $\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+k)$；

(2) $f(x+n) = \sum_{k=0}^{n}C_n^k \Delta^k f(x)$

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，(1) 显然成立.

设 $\Delta^{n-1} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k f(x+k)$ 则，

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k \Delta f(x+k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k f(x+k+1) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k f(x+k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_{n-1}^{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}C_{n-1}^k f(x+k)$$

$$= f(x+n) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k)f(x+k) + (-1)^n f(x)$$

$$= (-1)^n f(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+k) + f(x+n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+k).$$

于是，公式(1)对一切 $n\in \mathbf{N}^*$ 成立.

公式(2)的证明请读者自行完成.

若 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，则有如下性质：

(i) $\deg\Delta f \leqslant n-1$，$\Delta^m f = 0$(当 $m > n$ 时)；

(ii) $\Delta^n f = n!\cdot a_0$(a_0 是 f 的首项系数)；

(iii) 对所有 $\deg f < m$，$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i f(i) = 0$.

证明 注意到多项式 $f(x+1)$ 与 $f(x)$ 的首项系数相同，即得 $\deg\Delta f \leqslant n-1$. 由此得 $\deg\Delta^2 f \leqslant n-2$，…，$\deg\Delta^{n-1} f \leqslant 1$，所以 $\Delta^n f$ 为常数，从而当 $m > n$ 时，$\Delta^m f = 0$.

用归纳法不难证明 $\Delta^n x^n = n!$，又 $\Delta^n x^k = 0(k < n)$.

于是 $\Delta^n f = \Delta^n(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = a_0\Delta^n x^n = n!\cdot a_0$.

由(i)，对所有 $\deg f < m$，有 $\Delta^m f(x) = 0$，故在公式(1)中，令 $x=0$，有



$$0=\Delta^m f(0)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}C_m^i f(i)$$

从而 $\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i f(i)=0$.



例题精析

例1 一个二次函数 $y=f(x)$，当 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 时，它的值与 $\sin x$ 的对应值相同，求此二次函数.

分析 由 $\deg f=2$ 及 $f(x)$ 在 3 个点上的取值，利用拉格朗日插值公式直接求解.

解 由 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$，$f(\pi)=0$ 及拉格朗日插值公式，有

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)}{\left(0-\frac{\pi}{2}\right)(0-\pi)}f(0)+\frac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{(\pi-0)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}f(\pi)$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x.$$

即为所求.

例2 求满足 $p(-1)=1$，$p(1)=3$，$p(3)=21$，$p(21)=8823$ 的一个多项式 $p(x)$.

分析 满足题设条件的多项式有无穷多个，由于只需找出一个，我们不妨找一个 3 次多项式. 利用拉格朗日插值公式可直接写出 $p(x)$，但化简比较麻烦，我们可改用另一种方法计算. 设 $p(x)=A(x+1)(x-1)(x-3)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)+D$，再由条件计算 A,B,C,D 即可.

解 满足题设条件的多项式有无穷多个，由于只需找出一个，我们不妨找一个 3 次多项式. 设 $p(x)=A(x+1)(x-1)(x-3)+B(x+1)(x-1)+C(x+1)+D$ ①

令 $x=-1$，得 $D=p(-1)=1$. 令 $x=1$，得 $p(1)=C(1+1)+1$，所以 $C=1$.

令 $x=3$，得 $p(3)=B(3+1)(3-1)+(3+1)+1$，所以 $B=2$.

令 $x=21$，得 $p(21)=A(21+1)(21-1)(21-3)+2(21+1)(21-1)+(21+1)+1$，

所以 $A=1$. 因此，满足题设的一个多项式为

$$p(x)=(x+1)(x-1)(x-3)+2(x+1)(x-1)+(x+1)+1=x^3-x^2+3$$

评注 ①式也称为牛顿插值公式，将它和待定系数法结合起来使用，往往能出奇



制胜

一般地，设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是 $n+1$ 个不同的数，则任何一个次数不超过 n 的多项式 $f(x)$ 可以唯一地表示为

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}),$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 待定（由 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ 容易逐个确定），这种形式的插值多项式叫做牛顿插值多项式.

例3 设 N 为正整数，且 $N+1$ 为质数，$a_i\in\{0,1\}$，$i=0,1,2,\cdots,N$，并且 a_i 不全相同，多项式 $f(x)$ 满足 $f(i)=a_i$，$i=0,1,2,\cdots,N$. 求证：$f(x)$ 的次数至少为 N.

分析 利用牛顿插值公式证明.

证明 若 $f(x)$ 的次数小于 N，则由牛顿插值公式可设

$$f(x)=C_0+C_1x+C_2x(x-1)+\cdots+C_Nx(x-1)\cdots(x-N+1) \quad ①$$

其中 $C_0, C_1, \cdots, C_N$ 待定，并且由于 $f(x)$ 的次数小于 N，故应有 $C_N=0$.

在①中分别令 $x=0, 1, 2, \cdots, N$，得方程组

$$\begin{cases} C_0=f(0) & ②_1 \\ C_0+C_1=f(1) & ②_2 \\ C_0+2C_1+2!\,C_2=f(2) & ②_3 \\ \cdots & \cdots \\ C_0+\dfrac{N!}{(N-1)!}C_1+\dfrac{N!}{(N-2)!}C_2+\cdots+\dfrac{N!}{0!}C_N=F(N) & ②_{N+1} \end{cases}$$

将第$②_{i+1}$式乘以 $(-1)^iC_N^i$，再求和，可知 $(-1)^N\cdot\dfrac{N!}{0!}C_N=\sum\limits_{i=0}^{N}(-1)^iC_N^if(i)$.

于是由 $C_N=0$，可知 $\sum\limits_{i=0}^{N}(-1)^iC_N^if(i)=0$.

注意到 $N+1$ 为质数，记 $p=N+1$，则

$$\begin{aligned} N(N-1)\cdots(N-i+1)&=(p-1)(p-2)\cdots(p-i)\\ &\equiv(-1)(-2)\cdots(-i)=(-1)^i\cdot i!\pmod p. \end{aligned}$$

结合当 $0\leqslant i\leqslant N$ 时，$(i!,p)=1$，可知 $C_N^i\equiv(-1)^i\pmod p$.

所以 $0=\sum\limits_{i=0}^{N}(-1)^iC_N^if(i)\equiv\sum\limits_{i=0}^{N}(-1)^{2i}a_i=\sum\limits_{i=0}^{N}a_i\pmod p$.

又 $a_i\in\{0,1\}$ $(0\leqslant i\leqslant N)$，故只可能 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ 均相等，矛盾.

所以，多项式 $f(x)$ 的次数至少为 N.

评注 由 $\deg f<N$ 及多项式差分的性质(iii)即得 $\sum\limits_{i=0}^{N}(-1)^iC_N^if(i)=0$.



例4 设 n 次多项式 $f(x)$ 满足 $f(k)=\dfrac{1}{C_{n+1}^{k}}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，求 $f(n+1)$.

解法1 因已知 $f(x)$ 在 $n+1$ 个不同点处的值，故由拉格朗日插值公式，可唯一求得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_{n+1}^{k}}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}\frac{x-i}{k-i}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod\limits_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}(x-i)}{C_{n+1}^{k}(-1)^{n-k}(n-k)!k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n+1-k}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}(x-i),$$

因此
$$f(n+1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n+1-k}{(n+1)!}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant n}}(n+1-i)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(n+1-i)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$$

$$=\begin{cases}0,\text{当 } n \text{ 为奇数时}\\1,\text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

解法2 因 $\deg f=n$，所以 $f(x)$ 的 $n+1$ 阶差分为0，故由性质(iii)，得 $\sum\limits_{i=0}^{n+1}(-1)^{i}C_{n+1}^{i}f(i)=0$. 将 $f(i)=\dfrac{1}{C_{n+1}^{i}}(i=0,1,\cdots,n)$ 代入，即得 $f(n+1)=\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}$.

由此即可得解法1中的结果.

例5 设 $f(x)$ 是一个 n 次多项式，满足 $f(k)=2^{k}$，$k=1,2,\cdots,n+1$. 试求 $f(n+2)$，$f(n+3)$ 的值(答案用 n 的复函数并以最简形式表达).

分析 因 $f(x)$ 的 $n+1$ 阶差分为零，故由公式(1)，得 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^{k}f(x+k)=0$ 分别取 $x=1,2$，即可求得 $f(n+2)$，$f(n+3)$.

解 因 $\deg f=n$，所以 $f(x)$ 的 $n+1$ 阶差分为零，故由公式(1)，得 $\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^{k}f(x+k)=0$. 取 $x=1$，并将 $f(k)=2^{k}(k=1,2,\cdots,n+1)$ 代入，可得

$$f(n+2)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_{n+1}^{k}2^{k+1}=2^{n+2}-2\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}2^{k}C_{n+1}^{k}\right)$$
$$=2^{n+2}-2(2-1)^{n+1}=2^{n+2}-2.$$

再取 $x=2$，可类似地求得

$$f(n+3) = -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^{k}2^{k+2} + C_{n+1}^{n+1}(2^{n+2}-2)$$

$$= 2^{n+3} - 4\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}2^{k}C_{n+1}^{k} - 2C_{n+1}^{n+1}$$

$$= 2^{n+3} - 4(2-1)^{n+1} - 2(n+1)$$

$$= 2^{n+3} - 2n - 6.$$

例 6 求证：对于多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，$|f(1)|$，$|f(2)|$，…，$|f(n)|$，$|f(n+1)|$ 中至少有一个不小于 $\frac{n!}{2^n}$.

分析 利用公式(1)及性质(ii)，通过 $\Delta^n f(1)$，建立 $f(1)$，$f(2)$，…，$f(n)$，$f(n+1)$间的关系，再用反证法证明.

证明 这里涉及 $f(x)$ 从 $f(1)$ 开始的连续 $n+1$ 个值，故可考虑 $\Delta^n f(1)$，利用公式(1)及性质(i)，可得 $\Delta^n f(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(k+1)=n!$.

反设对 $k=0,1,\cdots,n$ 均有

$$|f(k+1)|<\frac{n!}{2^n}，则 n!\leqslant\sum_{k=0}^{n}C_n^k|f(k+1)|<\frac{n!}{2^n}\sum_{k=0}^{n}C_n^k=n!,$$

矛盾，故命题得证.

例 7 设 $p(x)$ 为 $2n$ 次多项式，满足 $p(0)=p(2)=\cdots=p(2n)=0$，$p(1)=p(3)=\cdots=p(2n-1)=2$，及 $p(2n+1)=-30$. 求 n 及 $p(x)$.

分析 构造多项式 $Q(x)=p(x)-1$，则 $Q(k)=(-1)^{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots,2n$. 利用拉格朗日插值公式唯一地表示出 $Q(x)$，并将 $x=2n+1$ 代入，化简求解.

解 令 $Q(x)=p(x)-1$，则 $\deg Q=2n$，且 $Q(k)=(-1)^{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots,2n$. 由拉格朗日插值公式知 $Q(x)=\sum\limits_{k=0}^{2n}Q(x_k)\prod\limits_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant 2n}}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$，其中 $x_k=k$，$k=0,1,2,\cdots,2n$. 将 $x=2n+1$ 代入上式，可得

$$Q(2n+1)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k+1}\prod_{\substack{i\neq k\\0\leqslant i\leqslant 2n}}\frac{2n+1-i}{k-i}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k+1}(-1)^{2n-k}\frac{(2n+1)\cdots(2n+2-k)(2n-k)\cdots1}{k!(2n-k)\cdots1}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{2n+1}\frac{(2n+1)\cdots(2n+1-k+1)}{k!}$$

$$=-\sum_{k=0}^{2n}C_{2n+1}^{k}=-\left(\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}-1\right)=-2^{2n+1}+1$$



所以 $p(2n+1)=Q(2n+1)+1=2-2\cdot 4^n$.

由已知条件 $p(2n+1)=-30$,所以 $2-2\cdot 4^n=-30$,解得 $n=2$,所以 $\deg p=4$.

此时,由题设条件 $p(0)=p(2)=p(4)=0$,可设 $p(x)=Ax(x-2)(x-4)(x-x_0)$.

再由 $p(1)=p(3)=2$,得 $\begin{cases}3A(1-x_0)=2\\-3A(3-x_0)=2\end{cases}$.

解得 $A=-\frac{2}{3}$,$x_0=2$. 因此 $p(x)=-\frac{2}{3}x(x-2)^2(x-4)$.

例 8 设△ABC的三边长为a,b,c,点P是△ABC所在平面上的任意一点. 求证:

$$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab}\geqslant 1.$$

分析 对于多项式 $f(x)=1$,利用拉格朗日插值公式构造等式证明.

证明 设点 A、B、C、D、P 对应的复数分别为 z_1、z_2、z_3、z_0,则对于多项式 $f(z)=1$,由拉格朗日插值公式知,对任意的复数z,有

$$\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z-z_3)(z-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}+\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}=1.$$

在上式中令 $z=z_0$,并两边取模,可得

$$\left|\frac{(z_0-z_2)(z_0-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|+\left|\frac{(z_0-z_3)(z_0-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}\right|+\left|\frac{(z_0-z_1)(z_0-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right|$$

$$\geqslant\left|\frac{(z_0-z_2)(z_0-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}+\frac{(z_0-z_3)(z_0-z_1)}{(z_2-z_3)(z_2-z_1)}+\frac{(z_0-z_1)(z_0-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right|=1.$$

即 $$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab}\geqslant 1.$$

评注 一般地,设 a_1,a_2,…,a_{n+1} 是 $n+1$ 个不同的数,则对于多项式 $f(x)=1$,由拉格朗日插值公式知,对任意的x有

$$\frac{(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_{n+1})}+\frac{(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_{n+1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_{n+1})}$$

$$+\cdots+\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\cdots(a_{n+1}-a_n)}=1.$$

此恒等式在数学竞赛中有比较广泛的应用.

例 9 设 $n\geqslant 2$,对于n元复数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,证明以下恒等式:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_k+b_j)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}(a_k-a_j)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(b_k+a_j)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}(b_k-b_j)}.$$

分析 构造多项式 $f(x)=\prod_{j=1}^{n}(x+b_j)-\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)$，则 $f(a_k)=\prod_{j=1}^{n}(a_k+b_j)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$．注意到 $\deg f\leqslant n-1$，故由拉格朗日插值公式，得 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}f(a_k)\prod_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}\frac{x-a_j}{a_k-a_j}$，比较上式两边 x^{n-1} 的系数可证之．

证明 令 $f(x)=\prod_{j=1}^{n}(x+b_j)-\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)$．由于 $f(x)$ 的次数不超过 $n-1$，故由拉格朗日插值公式，得 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}f(a_k)\prod_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}\frac{x-a_j}{a_k-a_j}$． ①

注意到 $f(a_k)=\prod_{j=1}^{n}(a_k+b_j)(1\leqslant k\leqslant n)$，比较 ① 式两边 x^{n-1} 的系数，得

$$\sum_{j=1}^{n}a_j+\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(a_k)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}(a_k-a_j)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_k+b_j)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}(a_k-a_j)}.$$

同理可证 $$\sum_{j=1}^{n}a_j+\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(b_k+a_j)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}(b_k-b_j)}.$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(a_k+b_j)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}(a_k-a_j)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(b_k+a_j)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}(b_k-b_j)}.$$

例 10 在$[-1,1]$内给定 n 个不同点：$x_1<x_2<\cdots<x_n(n\geqslant 2)$．记 $t_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 为点 x_k 到其他所有点 $x_j(j\neq k)$ 距离的乘积，求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{t_k}\geqslant 2^{n-2}$．

分析 $t_k=\prod_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}|x_j-x_k|(1\leqslant k\leqslant n)$ 的形式，让人容易想到拉格朗日插值公式．设多项式 $f(x)$ 的次数不超过 $n-1$，则由拉格朗日插值公式得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\prod_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

则易发现有用等式 $f(x)$ 的首项系数 $=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{(-1)^{n-k}t_k}\left(\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(x_k)|}{t_k}\right)$



于是就尽可能构造系数较大的，而 $|f(x_i)|$ 较小的多项式.

证明 定义多项式序列 $f_m(x)$，满足

(1) $f_1(x)=x$，$f_2(x)=2x^2-1$；

(2) $f_m(x)=2xf_{m-1}(x)-f_{m-2}(x)(m\geqslant 3)$.

下面先用数学归纳法证明 $f_m(\cos\theta)=\cos m\theta(\theta\in\mathbf{R})$　　(＊)

对一切 $m\in\mathbf{N}^*$ 成立.

当 $m=1$、2 时显然成立.

假设结论对 $m-1$、$m-2(m\geqslant 3)$ 成立，则由(2)及归纳假设，知

$$
\begin{aligned}
f_m(\cos\theta)&=2\cos\theta f_{m-1}(\cos\theta)-f_{m-2}(\cos\theta)\\
&=2\cos\theta\cos(m-1)\theta-\cos(m-2)\theta\\
&=2\cos\theta\cos(m-1)\theta-[\cos(m-1)\theta\cos\theta+\sin(m-1)\theta\sin\theta]\\
&=\cos\theta\cos(m-1)\theta-\sin\theta\sin(m-1)\theta\\
&=\cos m\theta.
\end{aligned}
$$

故(＊)式对一切 $m\in\mathbf{N}^*$ 成立.

于是，由(＊)式可得，对一切 $x\in[-1,1]$，有 $|f_m(x)|\leqslant 1$.

又由(1)、(2)及数学归纳法易得到 $f_m(x)$ 的首项系数为 2^{m-1}，次数为 m.

下面对 $f_{n-1}(x)$ 用拉格朗日插值公式，得 $f_{n-1}(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_{n-1}(x_k)\prod\limits_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}\dfrac{x-x_j}{x_k-x_j}$.

比较两边首项系数，得 $2^{n-2}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f(x_k)}{(-1)^{n-k}t_k}$，所以 $2^{n-2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{|f(x_k)|}{t_k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{t_k}$.

故结论成立.



思考交流

思考题1 给定 $k,m,n\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant k\leqslant m\leqslant n$，求

$\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\dfrac{1}{n+k+i}\cdot\dfrac{(m+n+i)!}{i!\,(n-i)!\,(m+i)!}$ 的值

解 设 $g(x)=\dfrac{(x+m+1)(x+m+2)\cdots(x+m+n)}{x+n+k}$，由 $1\leqslant k\leqslant m\leqslant n$ 可知，$m+1\leqslant n+k\leqslant m+n$ 因此，$g(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式

由差分公式可写出 $g(x)$ 在 0 点的 n 次差分等于



$$\Delta^n g(0)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i g(i)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{(m+n+i)!}{(m+i)!}\cdot\frac{1}{n+k+i}$$

我们知道，$n-1$ 次多项式的 n 次差分恒等于 0，故有

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{(m+n+i)!}{i!\,(n-i)!\,(m+i)!}\cdot\frac{1}{n+k+i}=\frac{\Delta^n g(0)}{n!}=0.$$

利用多项式，也可以得到上述结果，即作多项式

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i x(x+1)\cdots(x+i-1)(x+i+1)\cdots(x+n)-(x-m-1)\cdots(x-m-n)$$

下面恰当选取系数 $a_i(0\leqslant i\leqslant n)$，使得 $f(x)\equiv 0$.

注意到 $f(x)$ 是不超过 n 次的多项式，因此 $f(x)\equiv 0$ 当且仅当 $f(x)$ 有 $n+1$ 个根 $0,-1,-2,\cdots,-n$. 于是，当 $0\leqslant i\leqslant n$ 时应有

$$\begin{aligned}0=f(-i)&=a_i(-i)(-i+1)\cdots(-i+i-1)(-i+i+1)\cdots\\&\quad(-i+n)-(-i-m-1)\cdots(-i-m-n)\\&=(-1)^i i!\,(n-i)!\,a_i-(-1)^n\cdot\frac{(m+n+i)!}{(m+i)!},\end{aligned}$$

即 $a_i=(-1)^{n+i}\dfrac{(m+n+i)!}{i!\,(n-i)!\,(m+i)!}$.

从而，我们得到了代数恒等式

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{(m+n+i)!}{i!(n-i)!(m+i)!}x(x+1)\cdots(x+i-1)(x+i+1)\cdots(x+n)$$
$$=(x-m-1)\cdots(x-m-n)$$

特别地，在上式中取 $x=n+k$，由 $1\leqslant k\leqslant m\leqslant n$ 可知 $m+1\leqslant n+k\leqslant m+n$，故此时等式右端为 0，于是有

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i}\frac{1}{n+k+i}\cdot\frac{(m+n+i)!}{i!\,(n-i)!\,(m+i)!}\cdot k(k+1)\cdots(n+k+i-1)(n+k+i)\cdot(n+k+i+1)\cdots(2n+k)=0.$$

从中约去与 i 无关的因子 $(-1)^n k(k+1)\cdots(2n+k)$，即得所证.

思考题 2 设 a,b,c 表示 $\triangle ABC$ 中 A,B,C 的对边边长，P_1,P_2 是 $\triangle ABC$ 平面上任意两点，它们到 A,B,C 三个顶点的距离分别为 $a_1,a_2;b_1,b_2;c_1,c_2$. 求证：$aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$.

证明 设在复平面上，A,B,C 三点对应的复数为 x_1,x_2,x_3，P_1,P_2 对应的复数为 p_1,p_2. 构造二次多项式 $f(x)=(x-p_1)(x-p_2)$，根据拉格朗日插值公式，得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\prod_{\substack{j\neq i\\1\leq j\leq 3}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

比较两边 x^2 的系数,得

$$\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{3}\prod_{\substack{j\neq i\\1\leq j\leq 3}}\frac{|f(x_i)|}{|x_i-x_j|}\geqslant 1. \qquad (*)$$

又 $|f(x_1)|=|(x_1-p_1)(x_1-p_2)|=a_1a_2$, $|f(x_2)|=b_1b_2$, $|f(x_3)|=c_1c_2$,且 $|x_1-x_2|=c$, $|x_2-x_3|=a$, $|x_3-x_1|=b$,将此代入(*)式,得

$$\frac{a_1a_2}{bc}+\frac{b_1b_2}{ca}+\frac{c_1c_2}{ab}\geqslant 1,$$

即 $aa_1a_2+bb_1b_2+cc_1c_2\geqslant abc$.

同步检测 9

1. 求一个次数小于 4 的多项式,使它满足 $f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(2)=5$, $f(3)=11$.

2. 求 $f(x)=x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^{9}+x$ 除以 $g(x)=x^3-x$ 的余式.

3. 求证:对每一自然数 $n(n\neq 0)$ 和每一实数 $x\left(x\neq\frac{m\pi}{2^k}, k=0,1,2,\cdots,n\right)$,有

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x.$$

4. 设 $a\geqslant 3$, $p(x)$ 是实系数多项式, $\deg p(x)=n$,求证 $\max\limits_{0\leq j\leq n+1}|a^j-p(j)|\geqslant 1$.

5. 设 $p(x)$ 为 $3n$ 次多项式,适合

$$p(0)=p(3)=\cdots=p(3n)=2,$$
$$p(1)=p(4)=\cdots=p(3n-2)=1,$$
$$p(2)=p(5)=\cdots=p(3n-1)=0,$$

并且 $p(3n+1)=730$,求 n.

6. 设多项式 $p(x)$ 的次数不超过 $2n$,且对区间 $[-n,n]$ 的每一个整数 k,都有 $|p(k)|\leqslant 1$,求证:对任意 $x\in[-n,n]$,有 $|p(x)|\leqslant 2^{2n}$.

7. 在单位圆周上,给定 $n(n\geqslant 2)$ 个不同的点 p_1, p_2, $\cdots$, p_n. 对于其中任意一点 p_k,

它与其他所有点的距离的乘积记为 d_k，求证：$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n}\geqslant 1$.

8. 设给定整数 $x_0<x_1<\cdots<x_n$. 求证：多项式 $p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$ 在点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处取值中存在这样的一个值，其绝对值不小于 $\frac{n!}{2^n}$.

9. 当 x 取连续 $n+1$ 个整数时，多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$ 都取整数值，则对任意整数，$f(x)$ 均取整数值.

10. 对于给定的 n 个不同的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$，记 $p_i=\prod\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(a_i-a_j)$，$i=1, 2, \cdots, n$. 求证：对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}$ 是整数.



第　讲　整系数多项式

知识点金

对 $K[x]$ 中的 n 次多项式 $f(x)$，如果 $f(x)$ 不能表示为 K 上的两个次数小于 n 的多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的乘积，则称 $f(x)$ 为 K 上的不可约多项式.

由于 $C[x]$ 中的每一个多项式都可以表示为 C 上的一次多项式之积，故 $C[x]$ 中的不可约多项式次数不超过 1. 利用实系数多项式虚根成对定理知，$R[x]$ 中的不可约多项式次数不超过 2. 本讲我们讨论 $Z[x]$ 中的不可约多项式.

设整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 各项系数的最大公约数等于 1，即 $(a_n,a_{n-1},\cdots,a_0)=1$，则称 $f(x)$ 为本原多项式. 下面的重要结果称为高斯引理，是研究整系数多项式的基础.

高斯引理　$Z[x]$ 中两个本原多项式的乘积仍是一个本原多项式.

证明　反证法. 设有两个本原多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0$ 使得 $f(x)g(x)$ 不是本原的，则有素数 p 整除 $f(x)g(x)$ 的所有系数. 因 $f(x)$ 是本原的，故 p 不能整除所有的 a_i. 设 r 是最小的下标，使 $p\nmid a_r$. 类似地，设 s 是最小的下标，使 $p\nmid b_s$.

考察 $f(x)g(x)$ 中 x^{r+s} 的系数 $a_rb_s+a_{r-1}b_{s+1}+a_{r-2}b_{s+2}+\cdots+a_{r+1}b_{s-1}+a_{r+2}b_{s-2}+\cdots$. 这个和是 p 的倍数. 但另一方面，这个和式除第一项 a_rb_s 外，其余各项都能被 p 整除，故它又不是 p 的倍数，矛盾.

$Q[x]$ 中的非零多项式与 $Z[x]$ 中的本原多项式有紧密的关系，下面这个定理充分说明了这一点.

定理　若整系数多项式 $f(x)$ 在整系数范围内不可约，那么它在有理系数范围内也不可约.

证明　我们证明原命题的逆否命题.



设整系数多项式 $f(x)$ 可分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积：$f(x)=g(x)h(x)$。先将 $g(x)$ 的各系数通分，然后将公分母提出，再将通分后各分子的最大公约数提出，这样，剩下一个（整系数）本原多项式，记作 $g_1(x)$。对 $h(x)$ 也作类似处理，同样也得一个本原多项式 $h_1(x)$。于是，我们得到 $f(x)=\frac{r}{s}g_1(x)h_1(x)$，$s,r\in\mathbf{Z}$。

由高斯引理，$g_1(x)h_1(x)$ 是本原多项式；又 $f(x)$ 是整系数多项式，所以 s 整除 $rg_1(x)h_1(x)$ 的所有的系数，因而 $s\mid r$，即 $\frac{r}{s}\in\mathbf{Z}$。因此 $f(x)$ 在整系数范围内可约。证毕

判别一个整系数多项式是否不可约，是一件极其困难和复杂的事情。下面的结果，给出了多项式不可约的一个充分条件，用处相当广泛。

艾森斯坦因判别法　设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbf{Z}[x]$，若存在素数 p，使得

(1) $p\mid a_i$，$i=0,1,\cdots,n-1$；

(2) $p\nmid a_n$；

(3) $p^2\nmid a_0$，

则 $f(x)$ 在整系数范围内不可约（从而在有理系数范围内也不可约）。

证明　这里的证明类似于高斯引理中的论证。

设有两个整系数多项式 $g(x)=b_lx^l+b_{l-1}x^{l-1}+\cdots+b_0$，$h(x)=c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\cdots+c_0$，使 $f(x)=g(x)h(x)$。因 $a_0=b_0c_0$ 被 p 整除，但不被 p^2 整除，故 b_0，c_0 中恰有一个被 p 整除，不妨设 $p\mid c_0$。又 $a_n=b_lc_m$ 不被 p 整除，故 $p\nmid c_m$。现在可取最小的下标 r，使 $p\nmid c_r$，显然 $r\neq 0$。又 $a_r=b_0c_r+b_1c_{r-1}+\cdots+b_rc_0$，

因 $p\nmid b_0c_r$，且和式中其余项都能被 p 整除，故 $p\nmid a_r$，而 $0<r\leqslant m<n$，这与条件(1)矛盾。

对于艾森斯坦因判别法可作如下推广：

定理　设 $f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_0$ 是整系数多项式，并设存在素数 p 和自然数 $m\leqslant n$，使得

(1) $p\nmid c_m$；

(2) $p\mid c_j$，$j=0,1,\cdots,m-1$；

(3) $p^2\nmid c_0$，

则 $f(x)$ 具有次数不小于 m 的整系数不可约因式。

证明　首先证明：若 f 分解为整系数多项式 g 和 h 的乘积，即 $f(x)=g(x)h(x)$，则 g 与 h 之一的次数 $\geqslant m$，并且该多项式（对同样的 p 和 m）满足类似的条件(1)、(2)、(3)。

事实上，设 $g(x)=a_lx^l+a_{l-1}x^{l-1}+\cdots+a_0$，

$$h(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_0.$$



因为 $p\mid c_0=a_0b_0$，$p^2\nmid c_0=a_0b_0$，所以，不妨设 $p\mid a_0$，$p^2\nmid a_0$，$p\nmid b_0$。又 $p\nmid c_n=a_rb_s$，则 $p\nmid a_r$。不妨设 a_k 是 $a_0,a_1,\cdots,a_r$ 之中第一个不被 p 整除者，考察

$c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k$，可知 $p\nmid c_k$，因而 $k=m$。这样，我们确认多项式 $g(x)$ 满足以下三个条件：

(1) $p\nmid a_m$；

(2) $p\mid a_j$，$j=0,1,\cdots,m-1$；

(3) $p^2\nmid a_0$。

若 $g(x)$ 不可约，则定理的结论已证实。否则可重复类似的讨论，直到得出一个次数不小于 m 的不可约因式。证毕

例题精析

例 1　求证：$f(x)=5x^4-6x^3+12x-6$ 在有理系数范围内不可约。

分析　取素数 $p=3$，利用艾森斯坦因判别法判定。

证明　取素数 $p=3$，由于 $3\mid(-6)$，$3\mid 12$，$3\mid 6$，$3\nmid 5$，且 $3^2\nmid 6$，故根据艾森斯坦因判别法知，$f(x)$ 在整系数范围内不可约，进而在有理系数范围内也不可约。

例 2　设 p 是一个质数，则多项式 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在整系数范围内不可约。

分析　显然 $f(x)$ 不能直接用艾森斯坦因判别法判定。注意到 $f(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$ 并作代换 $\varphi(y)=f(y+1)=\dfrac{(y+1)^p-1}{y}$，展开后即可用艾森斯坦因判别法判定。

证明　将多项式 $f(x)$ 表示成 $f(x)=\dfrac{x^p-1}{x-1}$，再作代换

$$\varphi(y)=f(y+1)=\frac{(y+1)^p-1}{y}=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^{p-2}y+C_p^{p-1}.$$

因为 $p\mid C_p^j$，$j=1,2,\cdots,p-1$，$p\nmid 1$，$p^2\nmid C_p^{p-1}=p$，所以由艾森斯坦因判别法知，$\varphi(y)$ 在整系数范围内不可约，从而 $f(x)$ 在整系数范围内也不可约。

例 3　已知 $n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$。求证：多项式 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约。

分析　本题采用艾森斯坦因判别法不易处理（找不到合适的素数 p），可采用反证法，并结合待定系数法证明。这也是一种判定多项式是否可约的重要方法。

证明　采用反证法。若存在 $g(x)$，$h(x)\in\mathbf{Z}[x]$，使 $f(x)=g(x)h(x)$，这里

$g(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$，

$h(x)=x^r+b_{r-1}x^{r-1}+\cdots+b_0$,

其中 $m,r\in\mathbf{N}^*$. 由整系数多项式有理根判定定理，可知 $f(x)$ 没有有理根(因为 $f(\pm1)\neq0, f(\pm3)\neq0$)，于是 $m,r\geq2$.

比较 $f(x)=g(x)h(x)$ 两边的常数项，可知 $a_0b_0=3$，于是不妨设 $a_0=3$，$b_0=1$. 这时，由于 $g(x)$ 的最高项系数不是3的倍数，可设 $a_0,a_1,\cdots,a_{m-1},a_m(=1)$ 中不能被3整除的下标最小的项为 a_k，比较两边 x^k 的系数(注意到 $0<k\leq m\leq n-2$)，可知 $0=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k$.

上式中仅有右边的项 a_kb_0 不是3的倍数，矛盾. 因此，命题成立.

例4 试证 $f(x)=x^p+px+2p-1$(p 为素数)不能分解为两个次数大于零的有理系数多项式的积.

分析 对素数 p 分类讨论.

证明 对素数 p 分两种情形讨论.

(1) 当 $p=3$ 时，$f(x)=x^3+3x+5$. 如果命题不成立，由于它是3次多项式，故必有有理根，且有理根只可能是 $\pm1,\pm5$. 但 $f(\pm1)\neq0$，$f(\pm5)\neq0$，从而命题成立.

(2) 当 $p\neq3$ 时，为了利用艾森斯坦因判别法，需要将 $f(x)$ 变形，令 $x=y+1$，代入 $f(x)$，得 $g(y)=f(y+1)=(y+1)^p+p(y+1)+2p-1$

$$=y^p+C_p^1y^{p-1}+\cdots+C_p^{p-2}y^2+(C_p^1+p)y+3p.$$

因为 $p\nmid1$，$p\mid C_p^i$，$i=1,2,\cdots,p-1$. 又 $p\neq3$，则 $p^2\nmid3p$，故由艾森斯坦因判别法知，$g(y)$ 在整数范围内不可约，进而在有理数范围内也不可约，于是 $f(x)$ 在有理数范围内不可约.

评注 艾森斯坦因判别法仅是判别一个整系数多项式在整数范围内是不可约的充分条件，并不是必要条件.

例5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $n(n\geq2)$ 个不同的整数，求证：多项式 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在整数集上不可约.

分析 采用反证法. 利用多项式的根与次数间的关系导出矛盾.

证明 用反证法. 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1=p(x)\cdot q(x)$，其中 $p(x),q(x)$ 是首项系数为1的整系数多项式，且 $\deg p>0$，$\deg q>0$. 于是 $p(x)+q(x)$ 不可能是零多项式，且 $\deg(p(x)+q(x))<n$. 因为 $p(a_i)\cdot q(a_i)=f(a_i)=-1$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $p(a_i),q(a_i)\in\mathbf{Z}$，所以 $p(a_i)$ 与 $q(a_i)$ 仅差一个符号，即有 $p(a_i)+q(a_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$. 也即 $p(x)+q(x)$ 至少有 n 个不同的整根，故 $\deg(p(x)+q(x))\geq n$，这与 $\deg(p(x)+q(x))<n$ 矛盾.

因此，多项式 $f(x)$ 在整数集上不可约.

例6 设整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+p$，其中 $a_n\neq0$，p 为素



数，且 $\sum_{i=0}^{n}|a_i|<p$，求证：$f(x)$ 在 Z 上不可约．

分析 先证明多项式 $f(x)$ 的根的模大于 1，再采用反证法证明 $f(x)$ 在 Z 上不可约．

证明 首先证明多项式 $f(x)$ 的根的模大于 1．反设 $f(r)=0$，且 $|r|\leqslant 1$，则

$p=|a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots+a_1r|\leqslant|a_nr^n|+|a_{n-1}r^{n-1}|+\cdots+|a_1r|\leqslant|a_n|+|a_{n-1}|+\cdots+|a_1|<p$，

矛盾．故反设不成立，$f(x)$ 的每个根的模大于 1．

若存在 $g(x),h(x)\in Z[x]$，使 $f(x)=g(x)h(x)$，这里

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0(b_m\neq 0,m\geqslant 1)$，

$h(x)=c_tx^t+c_{t-1}x^{t-1}+\cdots+c_0(c_t\neq 0,t\geqslant 1)$．

比较 $g(x)h(x)$ 与 $f(x)$ 的常数项，得 $b_0c_0=p$．由于 p 为素数，于是不妨设 $|b_0|=1$．

而由韦达定理知，$g(x)$ 的所有根的乘积为 $(-1)^m\dfrac{b_0}{b_m}$，于是所有根的模的乘积等于 $\dfrac{|b_0|}{|b_m|}\leqslant 1$，故存在 r，$|r|\leqslant 1$，使 $g(r)=0$，进而 $f(r)=0$，这与 $f(x)$ 的根的模大于 1 矛盾．

故 $f(x)$ 在 Z 上不可约．

例 7 设 p 为素数，$N=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_p$ 为自然数集的一个 p-分划．求证：在 $A_1,A_2,\cdots,A_p$ 中存在一个集合 A，使得存在无穷多个 $p-1$ 次的不可约多项式 $f(x)$，$f(x)$ 的系数属于 A 且两两不同．

分析 构造形如 $f(x)=(a_{p-1}p^2+1)x^{p-1}+(a_{p-2}p^2+1)x^{p-2}+\cdots+(a_0p^2+1)$ 的 $p-1$ 次不可约多项式即可证得结论．这里 $a_{p-1},a_{p-2},\cdots,a_0\in N$，且两两不同．

证明 由于 N 中模 p^2 余 1 的数有无穷多个，于是由抽屉原则知存在某个集合 A，它包含无穷多个具有这个性质的数．任取其中 p 个数 $a_0p^2+1,a_1p^2+1,\cdots,a_{p-1}p^2+1$，令 $f(x)=(a_{p-1}p^2+1)x^{p-1}+(a_{p-2}p^2+1)x^{p-2}+\cdots+(a_0p^2+1)$，则 $f(x)$ 为 $p-1$ 次多项式．下面证明 $f(x)$ 是不可约的．

因为 $f(x)=p^2(a_{p-1}x^{p-1}+a_{p-2}x^{p-2}+\cdots+a_0)+(x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+1)$

$$=p^2g(x)+\frac{x^p-1}{x-1},$$

这里 $g(x)=a_{p-1}x^{p-1}+a_{p-2}x^{p-2}+\cdots+a_0$．所以

$$f(x+1)=p^2g(x+1)+\frac{(x+1)^p-1}{x}$$

$$=p^2g(x+1)+(x^{p-1}+C_p^1x^{p-2}+\cdots+C_p^{p-2}x+C_p^{p-1})．$$

易知 $f(x+1)$ 的系数满足：首项系数不被 p 整除，其余各项系数被 p 整除，但 p^2 不能整除常数项，于是由艾森斯坦因判别法知 $f(x+1)$ 不可约，进而 $f(x)$ 不可约.

最后由 p 个数 $a_0p^2+1, a_1p^2+1, \cdots, a_{p-1}p^2+1$ 的取法知，这样的 $p-1$ 次不可约多项式 $f(x)$ 有无穷多个，其系数属于 A 且两两不同.

例 8 找出满足下列命题的所有正整数 k：若 $F(x)$ 是整系数多项式，且满足条件：对任意 $c\in\{0,1,\cdots,k+1\}$，$0\leqslant F(c)\leqslant k$，则 $F(0)=F(1)=\cdots=F(k+1)$.

分析 由题设，易知 $F(k+1)=F(0)$，因而 $F(x)-F(0)=x(x-k-1)G(x)$，其中 $G(x)$ 是整系数多项式. 进一步由因式定理知，当 $k\geqslant 3$ 时有

$$G(x)=x(x-2)(x-3)\cdots(x-k+1)(x-k-k)H(x),$$

其中 $H(x)$ 是整系数多项式. 最后，当 $k\geqslant 4$ 时，易证 $H(1)=H(k)=0$，于是命题对 $k\geqslant 4$ 成立. 而对 $k=1,2,3$ 不难举出反例.

解 此命题当且仅当 $k\geqslant 4$ 时成立.

我们先证明命题对于任意的 $k\geqslant 4$ 时都成立.

对于满足给定条件的整系数多项式 $F(x)$，由于 $F(k+1)-F(0)$ 是 $k+1$ 的倍数，且 $|F(k+1)-F(0)|\leqslant k$，所以 $F(k+1)=F(0)$. 因此 $F(x)-F(0)=x(x-k-1)G(x)$，其中 $G(x)$ 是整系数多项式. 于是，对任意的 $c\in\{1,2,\cdots,k\}$，都有

$$k\geqslant |F(c)-F(0)|=c(k+1-c)|G(c)|. \quad ①$$

注意到不等式 $c(k+1-c)>k$，即 $(c-1)(k-c)>0$ 对任意的 $c\in\{2,3,\cdots,k-1\}$ 都成立，且当 $k\geqslant 3$ 时，集合 $\{2,3,\cdots,k-1\}$ 非空. 于是，对这一集合中的任意 c，由①式得 $|G(c)|<1$，又 $G(c)$ 是整数，所以 $G(c)=0$，即 $2,3,\cdots,k-1$ 是 $G(x)$ 的根. 因此由因式定理知 $F(x)-F(0)=x(x-2)(x-3)\cdots(x-k+1)(x-k-1)H(x)$，②
其中 $F(x)$ 是整系数多项式.

为证明结论，还须证明 $H(1)=H(k)=0$.

事实上，对于 $c\in\{1,k\}$，由②式，得 $k\geqslant |F(c)-F(0)|=(k-2)!\cdot k\cdot|H(c)|$.

当 $k\geqslant 4$ 时，有 $k-2>1$，因此 $|H(c)|<1$，则 $H(c)=0$.

至此，我们证明了命题对于任意的 $k\geqslant 4$ 都成立.

上面的证明，同时为我们列举 $k=1,2,3$ 时不成立的反例提供了线索. 这些反例是：

当 $k=1$ 时，$F(x)=x(2-x)$；

当 $k=2$ 时，$F(x)=x(3-x)$；

当 $k=3$ 时，$F(x)=x(4-x)(x-2)^2$.

例 9 设 $p=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$ 是一个用十进制表示的质数，$n>1$，$a_n>1$. 求证：多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$



不可约

分析 假设 $f(x)$ 可约，即存在非常数的整系数多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$。注意到 $f(10)=g(10)h(10)=p$（质数），若能证明 $g(10)>1$ 且 $h(10)>1$，即得矛盾。

证明 先证明下面的结论：设 x_0 是 $f(x)$ 的根，那么 $\mathrm{Re}(x_0)\leqslant 0$ 或者 $|x_0|<4$。这里的 $\mathrm{Re}(x_0)$ 表示复数 x_0 的实部。

如果 $\mathrm{Re}(x_0)\leqslant 0$ 或 $|x_0|\leqslant 1$，则命题已经成立。当 $\mathrm{Re}(x_0)>0$ 且 $|x_0|>1$ 时，我们有 $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x_0}\right)=\frac{\mathrm{Re}(x_0)}{|x_0|^2}>0$。

于是 $0=\left|\frac{f(x_0)}{x_0^n}\right|=\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x_0}+\cdots+\frac{a_0}{x_0^n}\right|$

$$\geqslant\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x_0}\right|-\frac{a_{n-2}}{|x_0|^2}-\cdots-\frac{a_0}{|x_0|^n}$$

$$\geqslant\mathrm{Re}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x_0}\right)-\frac{9}{|x_0|^2}-\cdots-\frac{9}{|x_0|^n}$$

$$>a_n+a_{n-1}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x_0}\right)-\frac{9}{|x_0|^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{|x_0|}}$$

$$\geqslant 1-\frac{9}{|x_0|^2-|x_0|}$$

即 $|x_0|^2-|x_0|-9<0$，所以 $|x_0|<\frac{1+\sqrt{37}}{2}<\frac{1+\sqrt{49}}{2}=4$。

回到原题，反设 $f(x)$ 可约，即存在非常数的整系数多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$，使得

$f(x)=g(x)h(x)$

设 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 是 $g(x)$ 的根（$k\geqslant 1$），b_k 为其首项系数，则

$g(x)=b_k(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_k)$ ②

一方面，由 $g(x)$ 是整系数多项式知 $g(10)$ 是整数。另一方面，由于 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 也是 $f(x)$ 的根，如果 $r_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 为实数，则显然 $r_i<0$（否则 $f(r_i)>0$，因 $f(x)$ 的系数均为非负整数），所以 $|10-r_i|>10>1$。

而如果 r_i 为虚数，那么其共轭虚数 $\overline{r_i}$ 也是 $g(x)$ 的根，于是

$(10-r_i)(10-\overline{r_i})=100-20\mathrm{Re}(r_i)+|r_i|^2>100-20\times 4>1$

所以由②式，得 $|g(10)|>|b_k|\geqslant 1$。

综合上述两个方面，可知 $g(10)$ 是大于 1 的整数。同理可证 $h(10)$ 也是大于 1



的整数. 但在①式中取 $x=10$，得 $f(10)=g(10)h(10)=p$(质数)，矛盾. 所以 $f(x)$ 不可约.

例 10 设 n 是正整数，$n\geqslant 3$，p 是素数. 求证：多项式 $f(x)=x^n+p^2x^{n-1}+\cdots+p^2x+p^2$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约.

证明 先证明一个引理.

引理 设 p 为素数，n 为正整数，$\mathbf{Z}[x]$ 中的多项式 $c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0$ 满足 $p\nmid c_n$，$p\mid c_i(0\leqslant i\leqslant n-1)$. 若在 $\mathbf{Z}[x]$ 中有分解：

$$c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0=(a_rx^r+\cdots+a_1x+a_0)(b_sx^s+\cdots+b_1x+b_0) \qquad ①,$$

其中 r，s 为正整数，且 $n=r+s$，则有 $p\mid a_i(0\leqslant i\leqslant r-1)$，$p\mid b_j(0\leqslant j\leqslant s-1)$.

引理的证明 由题设知 $p\nmid c_n=a_rb_s$，故 $p\nmid a_r$，$p\nmid b_s$. 设 k 是最小下标 $(0\leqslant k\leqslant r)$，使得 $p\nmid a_k$，l 是最小下标 $(0\leqslant l\leqslant s)$，使得 $p\nmid b_l$.

若 $k+l<n=r+s$，考察①式两边 x^{k+l} 项的系数，得

$$c_{k+l}=a_kb_l+\sum_{\substack{i+j=k+l\\(i,j)\neq(k,l)}}a_ib_j.$$

由于当 $i+j=k+l$，$(i,j)\neq(k,l)$ 时，总有 $i<k$ 或 $j<l$，所以必有 $p\mid a_ib_j$. 又 $p\mid c_{k+l}$，从而 $p\mid a_kb_l$，矛盾. 故 $k+l=n=r+s$，即 $k=r$，$l=s$，从而

$p\mid a_i(0\leqslant i\leqslant r-1)$，$p\mid b_j(0\leqslant j\leqslant s-1)$.

回到原题. 假设存在 $g,h\in\mathbf{Z}[x]$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$ ②，

这里 $g(x)$ 是首项系数为 1 的 r 次多项式，$h(x)$ 是首项系数为 1 的 s 次多项式，$r,s\in\mathbf{N}^*$，$r+s=n$.

由引理，可设 $g(x)=x^r+p\sum\limits_{i=0}^{r-1}a_ix^i$，$h(x)=x^s+p\sum\limits_{j=0}^{s-1}b_jx^j$.

比较②式两边的常数项，知 $a_0b_0=1$. 对②式模 p^2，得

$$x^n\equiv x^{r+s}+px^r\cdot\sum_{j=0}^{s-1}b_jx^j+px^s\cdot\sum_{i=0}^{r-1}a_ix^i\pmod{p^2}.$$

故 $x^r\cdot\sum\limits_{j=0}^{s-1}b_jx^j+x^s\cdot\sum\limits_{i=0}^{r-1}a_ix^i\equiv 0\pmod p$ ③

假设 $r\neq s$，不妨设 $r<s$. 考察③式两边的 x^r 项的系数得 $b_0\equiv 0\pmod p$，矛盾. 所以 $r=s$，从而有 $\sum\limits_{i=0}^{r-1}(a_i+b_i)x^i\equiv 0\pmod p$. 特别地，$p\mid a_1+b_1$.

比较②式两边的一次项系数，得 $p^2=p^2(a_0b_1+a_1b_0)$，从而 $1=a_0b_1+a_1b_0=a_0(a_1$



h_i 是 p 的倍数,矛盾.所以,$f(x)$ 在 $Z[x]$ 中不可约.

思考交流

思考题 求具有下列性质的最小 $k\in\mathbf{N}^*$:对任意一个次数 $n\geqslant k$ 的整系数多项式 $f(x)$(首项系数为1),若至少有 $[\frac{n}{2}]+1$ 个不同整数 x,使 $|f(x)|=1$,则 $f(x)$ 不能分解成两个非常数的整系数多项式的乘积.

解 首先,若 $f(x)=g(x)h(x)$,$g,h\in Z[x]$,则 $n\leqslant 7$.

不妨设 $\partial(g(x))\leqslant\partial(h(x))$,则 $\partial(g(x))\leqslant[\frac{n}{2}]$.

设 $|f(x_i)|=1$,$i=1,\cdots,m$,$m\geqslant[\frac{n}{2}]+1$,因 $f(x_i)=\pm1$,所以 $g(x_i)=\pm1$,不妨设 $x_1,\cdots,x_m$ 中使 $g(x)=1$ 的 x 个数不少于使 $g(x)=-1$ 的 x 的个数.设它们为 $x_1<x_2<\cdots<x_l$,$l\geqslant\frac{m}{2}$,则

$$g(x)-1=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_l)\cdot p(x),p(x)\in Z[x].$$

由于 $\partial(g(x))\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$,$\left[\frac{n}{2}\right]+1\leqslant m$,$l\leqslant\partial(g(x))$,所以 $l<m$.又 $g(x_{l+1})=-1$,所以 $(x_{l+1}-x_1)(x_{l+1}-x_2)\cdots(x_{l+1}-x_l)p(x_{l+1})=-2$.

导出 $l\leqslant 3$.

当 $l=3$ 时,最多有一个整数 a 使 $(a-x_1)(a-x_2)(a-x_3)=-2$,得到 $m\leqslant 4$.

当 $l\leqslant 2$ 时,由 $l\geqslant\frac{m}{2}$,亦有 $m\leqslant 4$.由于 $m\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]+1$,有 $n\leqslant 7$,故 $k\leqslant 7$.

当 $n=7$ 时,取 $f(x)=[1-x(x-3)(x-1)][1+x(x-3)(x-2)(x-1)]$,则对 $x=0,1,2,3$ 有 $|f(x)|=1$,故 $k=7$.

同步检测10

1. 求证:多项式 $f(x)=x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$ 在整数范围内不可约.
2. 判别多项式 x^4+1 和 x^4+4 是否在 $Z[x]$ 上可约.
3. 设多项式 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d\in Z[x]$,并且 $bd+cd$ 是奇数.求证:$f(x)$ 不

能分解为两个整系数多项式的乘积.

4. 设 p 为素数,求证:多项式 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$ 在有理数范围内不可约

5. 求证:多项式 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 在 $Z[x]$ 中不可约

6. 设整系数多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+p\cdot a_n$,其中 $a_0a_n\neq 0$,p 是质数,且 $p>\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|\cdot|a_n|^{n-i-1}$,求证:$f(x)$ 不能分解成两个整系数多项式的积

7. 设整数 k 不被 5 整除,求证:x^5-x+k 在 Z 上不可约.

8. 设多项式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in Z[x]$,且满足条件

(1) $0<a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n$;

(2) $a_n=p^m$,这里 p 是一个素数(m 是正整数),且 $p\nmid a_{n-1}$.

求证:$f(x)$在 $Z[x]$上不可约.

9. 设 b 和 k 都是整数,$1<k<b$,多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 满足下述条件:

(1) $a_i(i=0,1,\cdots,n)$是非负整数;

(2) $f(b)=kp$,其中 p 为质数;

(3) $f(x)$的任一根 r 均适合 $|r-b|>\sqrt{k}$.

求证:$f(x)$ 在整数范围内不可约.

10. 设 $n\in N^*$,求证:多项式 $f(x)=(x^2+1^2)(x^2+2^2)\cdots(x^2+n^2)+1$ 在 $Z[x]$ 中不可约.





第[illegible]讲　多元多项式

知识点金

在前面关于多项式的讨论中，我们针对的都是一元多项式.本讲中，我们简单介绍多元多项式的基本内容.

形如 $\sum a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的多项式称为 n 元 m 次多项式.这里 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为变量，$\max\{k_1+k_2+\cdots+k_n\}=m$，$k_i\in\mathbf{N}(i=1,2,\cdots,n)$.

若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的每个单项式的次数都是 m，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 m 次齐次多项式，此时有 $f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^mf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

下面介绍一类特殊的多元多项式——对称多项式.

所谓对称多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是指满足下述条件的多项式：对 $1,2,\cdots,n$ 的任意排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$，有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})$.

设多项式 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0(a_n\neq0)$ 的 n 个根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则由韦达定理知

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sigma_2=\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\vdots$$

$$\sigma_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n},$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$



这里$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$是对称多项式,并且它们是对称多项式中最简单的,被称为基本对称多项式。

关于对称多项式,有下面的基本定理.

定理 任意一个n元对称多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$都可以表示为基本对称多项式$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$的多项式$f(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$,而且这种表示是唯一的.

最后,我们介绍牛顿公式.设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n,$$
$$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\ k\in\mathbf{N}.$$

则它们之间有如下关系:

(1) $x^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{x-x_i}=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$,其中$g(x)$为多项式,$\deg g<n$.

(2) 当$k>n$时,$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$;

当$1\leqslant k\leqslant n$时,$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^kk\sigma_k=0$.

证明 (1) 因为

$$\frac{x^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{x-x_i}}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i},$$

所以 $x^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{x-x_i}$

$$=f(x)\sum_{i=1}^{n}(x^k+x_ix^{k-1}+\cdots+x_i^{k-1}x+x_i^k)+g(x)$$
$$=f(x)(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)+g(x),$$

其中$g(x)=f(x)\sum_{i}\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}$为多项式,且$\deg g<n$.

(2) 当$k>n$时,由$f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$,

得 $x^{k-n}f(x)=x^k-\sigma_1x^{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nx^{k-n}$.

由于$f(x_i)=0(1\leqslant i\leqslant n)$,求和得到 $\sum_{i=1}^{n}(x_i^k-\sigma_1x_i^{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nx_i^{k-n})=0$,

故 $s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0$.

当$1\leqslant k\leqslant n$时,比较

$$x^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{x-x_i}=x^{k+1}(nx^{n-1}+\cdots+(-1)^k(n-k)\sigma_kx^{n-k-1}+\cdots)$$



以及(1)中 x^n 的系数，有

$$(-1)^k(n-k)\sigma_k=(-1)^k\sigma_k\cdot n+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^{k-2}\sigma_{k-2}s_2+\cdots-\sigma_1 s_{k-1}+s_k,$$

即 $$s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\sigma_2 s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0.$$

结论(2)称为牛顿幂和公式.

 例题精析

例1 把三元对称多项式 $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 表示为 σ_1，σ_2，σ_3 的多项式.

分析 利用多元多项式的字典排列法.

解 先介绍多元多项式的字典排列法. 对于 n 元多项式的两个单项式 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 和 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$，如果 k_1-l_1，k_2-l_2，$\cdots$，k_n-l_n 中第一个不为零的数是正数，则称单项式 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 先于 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$. 将多元多项式依此优先法则排列就称为它的字典排列. 依此法排列后，第一个系数不为零的单项式称为此多项式的首项.

回到本题. 由于 $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ 的首项是 x_1^3，其指数排列为(3，0，0)，而 $\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0=\sigma_1^3$，作对称多项式 $x_1^3+x_2^3+x_3^3-\sigma_1^3=-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+\cdots)-6x_1x_2x_3$. 它的首项 $-3x_1^2x_2$ 的指数排列为(2，1，0)，此时 $\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$，故作多项式

$$\begin{aligned}&x_1^3+x_2^3+x_3^3-\sigma_1^3+3\sigma_1\sigma_2\\=&-3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+\cdots)-6x_1x_2x_3+3(x_1^2x_2+x_1^2x_3+\cdots)+9x_1x_2x_3\\&-3x_1x_2x_3=3\sigma_3.\end{aligned}$$

于是 $$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3.$$

上述求法也可这样进行，对比：

指数组	相应单项式
(3，0，0)	σ_1^3
(2，1，0)	$\sigma_1\sigma_2$
(1，1，1)	σ_3

依基本定理应有 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=A\sigma_1^3+B\sigma_1\sigma_2+C\sigma_3$，

其中 A，B，C 是待定系数. 通过取 $(x_1，x_2，x_3)=(1，0，0)，(1，1，0)，(1，1，1)$ 可定出 $A=1$，$B=-3$，$C=3$.

评注 指数组所列出的数组实际上是在推导的每一步后所得多项式的首项的指数排列. 由基本定理，在每一步推导后，首项的指数依字典排列总是递降的. 另外，此法仅对齐次式有效.

例 2 已知 $xyz=x+y+z$，求证：$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-z^2)(1-x^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

分析 将左边对称多项式表示为基本对称多项式的多项式，并利用题设条件即可获证．但注意到左边多项式是非齐次的，故应先将其分成几个齐次式，再依例 1 的方法求解．

证明 设 $\sigma_1=x+y+z$，$\sigma_2=xy+yz+zx$，$\sigma_3=xyz$，则由题设，$\sigma_1=\sigma_3$．而

左边 $=(x^2y^2z+x^2yz^2+xy^2z^2)-(x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2)+(x+y+z)$

$\quad=\sigma_2\sigma_3-(x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2)+\sigma_1$.

记 $f(x,y,z)=x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2$，考虑将它表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 的多项式，对比：

指数组	相应单项式
$(2,1,0)$	$\sigma_1\sigma_2$
$(1,1,1)$	σ_3

可设 $f(x,y,z)=\sigma_1\sigma_2+A\sigma_3$，令 $x=y=z=1$，可得 $A=-3$．于是 $f(x,y,z)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$，进而

左边 $=\sigma_2\sigma_3-(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)+\sigma_1$

$\quad=\sigma_2\sigma_3-(\sigma_3\sigma_2-3\sigma_3)+\sigma_3$

$\quad=4\sigma_3=$ 右边．

证毕．

例 3 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=0$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_{n+1}=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$．求证：若 p 为质数，则 $p\mid a_p$.

分析 先利用特征根方法确定数列 $\{a_n\}$ 的通项公式（表示成关于特征根的多元多项式），再由基本定理，将其表示为基本对称多项式的多项式，即可获证．

证明 数列 $\{a_n\}$ 的特征方程为 $x^3-x-1=0$，设它的三个根为 x_1,x_2,x_3，考虑 $s_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n(n\geqslant 1)$，则数列 $\{s_n\}$ 满足 $s_{n+1}=s_{n-1}+s_{n-2}(n\geqslant 3)$，且由韦达定理易求得：$s_1=0$，$s_2=2$，$s_3=3$．故 $s_n=a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$．从而

$$
\begin{aligned}
a_p&=x_1^p+x_2^p+x_3^p\\
&=(x_1+x_2+x_3)^p-\sum C_p^{(k,l,m)}x_1^kx_2^lx_3^m\\
&=-\sum C_p^{(k,l,m)}x_1^kx_2^lx_3^m
\end{aligned}
$$

这里的"$\sum$"表示对满足 $k+l+m=p$ 且 $k,l,m\neq p$ 的非负整数 k,l,m 的所有情形求和，其中 $C_p^{(k,l,m)}=\dfrac{p!}{k!l!m!}=p\dfrac{(p-1)!}{k!l!m!}$．因为 p 为质数，$C_p^{(k,l,m)}\in\mathbf{N}^*$，所以 $p\mid C_p^{(k,l,m)}$，



记 $C_p^{k+l+m}=pD_p^{(k,l,m)}$，$f(x_1,x_2,x_3)=\sum D_p^{(k,l,m)}x_1^kx_2^lx_3^m$，则 $a_p=pf(x_1,x_2,x_3)$，其中 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为整系数对称多项式. 由基本定理，存在整系数多项式 $\varphi(x_1,x_2,x_3)$，使 $f(x_1,x_2,x_3)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$.

因为 $\sigma_1=0$，$\sigma_2=-1$，$\sigma_3=1$，所以 $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\mathbf{Z}$，于是 $f(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{Z}$，故 $p\mid a_p$. 证毕.

例 4 一个关于 x,y,z 的多项式 $P_m(x,y,z)$，$m=0,1,2,\cdots$，序列定义如下：$P_0(x,y,z)=1$，$m\geqslant1$ 时，

$$P_m(x,y,z)=(x+z)(y+z)P_{m-1}(x,y,z+1)-z^2P_{m-1}(x,y,z)\qquad①$$

证明 对每个 m，多项式 $P_m(x,y,z)$ 是对称的，即 x,y,z 的任意排列，它的值不变.

分析 x,y,z 虽有 6 个不同的排列，但实际只要证下列二式即可

$$P_m(x,y,z)=P_m(y,x,z)\qquad②$$

$$P_m(x,y,z)=P_m(x,z,y)\qquad③$$

$$P_m(x,y,z)=P_m(z,y,x)\qquad④$$

由①式知 x,y 处对称地位，故②式显然，且③式和④式只要证其一即可.

证明 由于①式中 x,y 处对称地位，所以显然有 $P_m(x,y,z)=P_m(y,x,z)$，于是我们只需证明 $P_m(x,y,z)=P_m(x,z,y)$ 就够了.

对 m 用数学归纳法，当 $m=0$ 时结论显然成立. 假设对 $1\leqslant k\leqslant m$，有

$$P_{m-k}(x,y,z)=P_{m-k}(x,z,y)\qquad⑤$$

下面证明 $P_m(x,y,z)=P_m(x,z,y)$，由①式知即证

$$(y+z)[(x+y)P_{m-1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{m-1}(x,y,z+1)]$$
$$=y^2P_{m-1}(x,z,y)-z^2P_{m-1}(x,y,z).$$

再由⑤式，即要证

$$(x+y)P_{m-1}(x,z,y+1)-(x+z)P_{m-1}(x,y,z+1)$$
$$=(y-z)P_{m-1}(x,y,z)\qquad⑥$$

此式对 $m=1$ 是显然的，于是我们又作归纳假设

$$(x+y)P_{m-2}(x,z,y+1)-(x+z)P_{m-2}(x,y,z+1)$$
$$=(y-z)P_{m-2}(x,y,z)\qquad⑦$$

下面来证⑥式，由①及⑦式，得

$$⑥\text{式左边}=(x+y)P_{m-1}(x,y+1,z)-(x+z)P_{m-1}(x,z+1,y)$$
$$=(x+y)[(x+z)(y+z+1)P_{m-2}(x,y+1,z+1)$$
$$-z^2P_{m-2}(x,y+1,z)]-(x+z)[(x+y)(y+z+1)P_{m-2}$$



$$(x, z+1, y+1) - y^2P_{m-2}(x, z+1, y)]$$
$$=(x+z)y^2P_{m-2}(x, y, z+1) - (x+y)z^2P_{m-2}(x, z, y+1)$$
$$=(x+z)y^2P_{m-2}(x, y, z+1) - z^2[(x+z)P_{m-2}(x, y, z+1)$$
$$+(y-z)P_{m-2}(x, y, z)]$$
$$=(y-z)[(x+z)(y+z)P_{m-2}(x, y, z+1) - z^2P_{m-2}(x, y, z)]$$
$$=(y-z)P_{m-1}(x, y, z),$$

从而 ⑥ 式成立.

综上所述,对每个 m,多项式 $P_m(x, y, z)$ 是对称的.

例 5 若实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=2$, $a^3+b^3+c^3=3$,求 abc 和 $a^4+b^4+c^4$ 的值.

分析 设 a, b, c 是多项式 $f(t)=t^3-\sigma_1t^2+\sigma_2t-\sigma_3$ 的三个根,记 $s_k=a^k+b^k+c^k$ $(k=1, 2, 3, 4)$. 由牛顿公式可求得 σ_1, σ_2, σ_3,进而求解.

解 设 a, b, c 是多项式 $f(t)=t^3-\sigma_1t^2+\sigma_2t-\sigma_3$ 的三个根,记 $s_k=a^k+b^k+c^k$, $k=1, 2, 3, 4$,则由牛顿公式及题设,有 $s_1=1=\sigma_1$, $s_2=2=\sigma_1s_1-2\sigma_2$, $s_3=3=\sigma_1s_2-\sigma_2s_1+3\sigma_3$.

解得 $\sigma_1=1$, $\sigma_2=-\frac{1}{2}$, $\sigma_3=\frac{1}{6}$,从而 $abc=\sigma_3=\frac{1}{6}$,且 $s_4=\sigma_1s_3-\sigma_2s_2+\sigma_3s_1=\frac{25}{6}$,

即 $a^4+b^4+c^4=\frac{25}{6}$.

例 6 解方程组
$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=n \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n \\ \cdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n=n \end{cases}$$

分析 构造多项式 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n$.

记 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(1\leqslant k\leqslant n)$,则由题设 $s_k=n$. 利用牛顿公式即可得 $f(x)$ 的根.

解 构造多项式 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n$. 记 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k(1\leqslant k\leqslant n)$,则由牛顿公式得 $s_n-\sigma_1s_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}s_1+(-1)^nn\sigma_n=0$.

注意到 $s_k=n\ (1\leqslant k\leqslant n)$,

所以 $1-\sigma_1+\sigma_2-\cdots+(-1)^n\sigma_n=0$,

即 $f(1)=0$,从而 1 是 $f(x)$ 的根.



不妨设 $x_n=1$，代入方程组，即得方程组的 $n-1$ 元情形，于是对 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 用同样的方法处理……继续下去，就有 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$，此为方程组的唯一解。

例 7 求证：$(2\sin\frac{\pi}{7})^{2n}+(2\sin\frac{2\pi}{7})^{2n}+(2\sin\frac{3\pi}{7})^{2n}$ 能被 $7^{[\frac{n}{3}]}$ 整除，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

分析 首先构造以 $x_k=(2\sin\frac{k\pi}{7})^2$ $(k=1,2,3)$ 为根的多项式 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$，记 $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$，利用牛顿公式建立 T_n 的递推关系，再用数学归纳法完成证明。

证明 令 $x_k=\left(2\sin\frac{k\pi}{7}\right)^2$，$k=1,2,3$，构造多项式

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-\sigma_1x^2+\sigma_2x-\sigma_3$，

其中 $\sigma_1=x_1+x_2+x_3=\sum\limits_{k=1}^{3}(2\sin\frac{k\pi}{7})^2=\sum\limits_{k=1}^{3}2(1-\cos\frac{2k\pi}{7})$

$$=6-2\sum_{k=1}^{3}\cos\frac{2k\pi}{7}=6-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\sum_{k=1}^{3}2\cos\frac{2k\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$=6-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}\sum_{k=1}^{3}\left[\sin\frac{(2k+1)\pi}{7}-\sin\frac{(2k-1)\pi}{7}\right]$$

$$=6-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7})=7,$$

同理可得 $\sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=14$，$\sigma_3=x_1x_2x_3=7$。

令 $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$，$n\in\mathbf{N}$，即证 $7^{[\frac{n}{3}]}\mid S_n$，而据牛顿公式，有

$S_n=\sigma_1S_{n-1}-\sigma_2S_{n-2}+\sigma_3S_{n-3}=7S_{n-1}-14S_{n-2}+7S_{n-3}$，且 $S_0=3$，$S_1=7$，$S_2=21$。

下面用数学归纳法证明 S_n 能被 $7^{[\frac{n}{3}]}$ 整除。

当 $n=0,1,2$ 时，结论显然成立。设 $n\leqslant k$ 时，S_n 能被 $7^{[\frac{n}{3}]}$ 整除。当 $n=k+1$ 时，由 $S_{k+1}=7(S_k-2S_{k-1}+S_{k-2})$ 知 S_{k+1} 能被 $7^{1+[\frac{k-2}{3}]}$ 整除。又 $1+[\frac{k-2}{3}]=[\frac{k+1}{3}]$，所以 S_{k+1} 能被 $7^{[\frac{k+1}{3}]}$ 整除，故 S_n 能被 $7^{[\frac{n}{3}]}$ 整除。证毕。

例 8 给定整数 $n\geqslant 2$，试确定最小常数 c，使得对任意的非负实数 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$，有

$\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant c(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^4$，并且对这个常数 c，确定等号成立的充分必要条件。

分析 令 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$，$k=1,2,3,4$，利用牛顿公式 $S_4-\sigma_1S_3+\sigma_2S_2$

$\sigma_3 S_1 + 4\sigma_4 = 0$，将 $\sum\limits_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)$ 表示成关于 σ_1，σ_2，σ_3，σ_4 的多项式，进而确定最小常数 c。

解 令 $S_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$，$k = 1, 2, 3, 4$. 根据牛顿公式，有

$S_4 - \sigma_1 S_3 + \sigma_2 S_2 - \sigma_3 S_1 + 4\sigma_4 = 0.$

不妨取 $S_1 = \sigma_1 = 1$，则

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{i=1}^n \left(x_i^3 \sum_{j\ne i} x_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i^3 (1 - x_i) = S_3 - S_4 = \sigma_2 S_2 - \sigma_3 S_1 + 4\sigma_4 = \sigma_2(1 - 2\sigma_2) + 4\sigma_4 - \sigma_3$$

因为 $\sigma_2(1 - 2\sigma_2) = \frac{1}{2}\cdot 2\sigma_2(1 - 2\sigma_2) \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sigma_2 + 1 - 2\sigma_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$，

以及 $$4\sigma_4 - \sigma_3 = \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\left(\sum_{j\ne i_1, i_2, i_3} x_j\right) - \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$$

$$= \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}\left(\sum_{j\ne i_1, i_2, i_3} x_j - 1\right)$$

$$= -\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}(x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3})$$

$$\leqslant 0.$$

所以 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leqslant \frac{1}{8}$，故 $c = \frac{1}{8}$. 当且仅当 $\sigma_2 = \frac{1}{4}$，且 $x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 中至少有 $n-2$ 个零，亦即 $x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 中恰有 $n-2$ 个零，另两个相等时等号成立.

例 9 设 n 是正偶数. 求证：存在一个正整数 k，满足 $k = f(x)(x+1)^n + g(x)(x^n+1)$，其中 $f(x)$，$g(x)$ 是两个整系数多项式. 如果用 k_0 表示满足上式的最小的 k，试将 k_0 表示为 n 的函数.

分析 注意到 n 为偶数时，$((x+1)^n, x^n+1) = 1$，故由裴蜀定理可证 k 的存在性.

证明 (i) n 为偶数时，$((x+1)^n, x^n+1) = 1$，于是存在有理系数多项式 $f^*(x)$，$g^*(x)$，使得 $1 = f^*(x)(x+1)^n + g^*(x)(x^n+1)$.

设 k 为 $f^*(x)$，$g^*(x)$ 的所有系数的分母的一个公倍数，记 $f(x) = kf^*(x)$，$g(x) = kg^*(x)$，则 $f(x)$，$g(x)$ 为整系数多项式，且 $k = f(x)(x+1)^n + g(x)(x^n+1)$.

(ii) 设 $n = 2^\alpha \cdot t$，t 为奇数，记 $m = 2^\alpha$，则可设 $x^n + 1 = (x^m+1)h(x)$，$h(x)$ 为整系数多项式，并设 $\varepsilon_j = e^{\frac{(2j-1)\pi i}{m}}$ $(j = 1, 2, \cdots, 2^\alpha)$ 为 $x^m + 1 = 0$ 的 m 个根.

若正整数 k，对整系数多项式 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $k = f(x)(x+1)^n + g(x)(x^n+1)$，则 $k = f(\varepsilon_j)(\varepsilon_j+1)^n$，$j = 1, 2, \cdots, m$. 于是，

$$k^m = \prod_{j=1}^m f(\varepsilon_j)\prod_{j=1}^m(\varepsilon_j + 1)^n.$$



设 $\sigma_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_m$，

$\sigma_2=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3+\cdots+\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m$，

……

$\sigma_m=\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_m$

由韦达定理知 σ_i 为整数. 因为 $\prod\limits_{j=1}^{m} f(\varepsilon_j)$ 为关于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 的整系数多项式，故 $\prod\limits_{j=1}^{m} f(\varepsilon_j)$ 可表示为 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m$ 的整系数多项式，于是它为整数. 而

$$\prod_{j=1}^{m}(\varepsilon_j+1)^n=\left[\prod_{j=1}^{m}(\varepsilon_j+1)\right]^n=(1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_m)^n=2^n,$$

因此，$2^n \mid k^m$，即 $2^t \mid k$. 于是，$k\geqslant 2^t$. 记

$$E(x)=(x+1)(x^2+1)\cdots(x^{2m-1}+1)=(x+1)^m F(x).$$

对于固定的 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$，考虑集合 $\{\varepsilon_j,\varepsilon_j^3,\varepsilon_j^5,\cdots,\varepsilon_j^{2m-1}\}$，其中的元素均为 x^m+1 的根且两两不等，故它为 $x^m+1=0$ 的解集，于是，

$$E(\varepsilon_j)=(1+\varepsilon_j)(1+\varepsilon_j^3)\cdots(1+\varepsilon_j^{2m-1})=(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_m)=2.$$

设 $G(x)(x^m+1)+2=E(x)=(x+1)^m F(x)$.

两边 t 次方，得 $G^*(x)(x^m+1)+2^t=(x+1)^n F^t(x)$ ①

其中 $G^*(x)$ 为某个整系数多项式

另外，由 $x^n+1=(x^m+1)h(x)$，有 $h(-1)=1$. 故可设 $C(x)(x+1)=h(x)-1$.

两边 n 次方，得 $C^n(x)(x+1)^n=h(x)d(x)+1$ ②

其中 $d(x)$ 为某个整系数多项式

由 ①、② 得

$$\begin{aligned}G^*(x)d(x)(x^n+1)&=G^*(x)(x^m+1)d(x)h(x)\\&=[(x+1)^n F^t(x)-2^t][C^n(x)(x+1)^n-1]\\&=(x+1)^n U(x)+2^t,\end{aligned}$$

其中 $U(x)$ 为某个整系数多项式.

因此存在整系数多项式 $f(x)$，$g(x)$，使得 $2^t=f(x)(x+1)^n+g(x)(x^n+1)$.

综合上述，$k_0=2^t$，其中 $n=2^m\cdot t$，t 为奇数.

例 10 证明 $P(x,y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2$ 不可能是 x，y 的实系数多项式的平方和的形式.

分析 1 反设 $P(x,y)=g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)$. 由于 $P(x,y)$ 是关于 x，y 的 6 次多项式，则 g_1，g_2 一般可能为 3 次，这样其项数颇多，比较系数较复杂. 为使比较系数的过

程简明清晰,我们采用分阶段比较的方法. 首先将 $g_i(x,y)(i=1,2)$ 按 y 的降幂整理,转化为对 y 的系数的比较,第二步再比较 x 的系数.

证法1 反设 $P(x,y)=g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)$,其中 $g_i(x,y)=a_i(x)y^2+b_i(x)y+c_i(x)(i=1,2)$. 代入并比较 y 的系数,得

$$a_1^2(x)+a_2^2(x)=x^2 \quad ①$$

$$a_1(x)b_1(x)+a_2(x)b_2(x)=0 \quad ②$$

$$b_1^2(x)+b_2^2(x)+2a_1(x)c_1(x)+2a_2(x)c_2(x)=x^4-3x^2 \quad ③$$

$$b_1(x)c_1(x)+b_2(x)c_2(x)=0 \quad ④$$

$$c_1^2(x)+c_2^2(x)=4 \quad ⑤$$

由实系数性质及⑤,可知 $c_i(x)=c_i$ 为常数,且 c_1、c_2 至少一个非零. 不妨设 $c_2\neq 0$,

则由④知 $b_2(x)=-\frac{c_1}{c_2}b_1(x)$ ⑥

代入②,得 $[a_1(x)c_2-a_2(x)c_1]b_1(x)=0$

若 $b_1(x)=0$,则由③知 $a_1(x)$、$a_2(x)$ 中必有一个为3次,这与①矛盾. 故必 $a_1(x)=\frac{c_1}{c_2}a_2(x)$,代入①,得

$$a_2(x)=\pm\frac{1}{2}c_2x,\ a_1(x)=\pm\frac{1}{2}c_1x \quad ⑦$$

将⑥、⑦代入③,得 $\frac{4}{c_2^2}b_1^2(x)\pm 4x=x^4-3x^2$,最后令 $b_1(x)=mx^2+nx+l$,代入上式比较系数,则引出矛盾.

故 $P(x,y)$ 不可能是 x、y 的实系数多项式的平方和的形式.

分析2 我们还可以采用另一种分阶段比较系数的方法:首先比较式子两边的同次齐次式,然后再比较相等的齐次式的系数.

证法2 反设 $P(x,y)=g_1^2(x,y)+g_2^2(x,y)$,并设 $g_i(x,y)=r_i(x,y)+s_i(x,y)+t_i(x,y)+u_i(x,y)$,其中 r_i、s_i、t_i、u_i 分别为三、二、一、零次齐次式,$i=1,2$. 代入并比较两边同次齐次式,得 $r_1^2(x,y)+r_2^2(x,y)=x^2y^4+x^4y^2$ ⑧

$$2r_1(x,y)t_1(x,y)+2r_2(x,y)t_2(x,y)+s_1^2(x,y)+s_2^2(x,y)=-3x^2y^2 \quad ⑨$$

$$2s_1(x,y)u_1(x,y)+2s_2(x,y)u_2(x,y)+t_1^2(x,y)+t_2^2(x,y)=0 \quad ⑩$$

在⑧式中,令 $r_i(x,y)=d_ix^2y+e_ixy^2+f_ix^3+h_iy^3$,比较两边 x^6 和 y^6 的系数,可得 $f_1=f_2=0$,$h_1=h_2=0$. 所以 $r_i(x,y)=xy(d_ix+e_iy)$ ⑪

同理,在⑨式中,令 $s_i(x,y)=k_ix^2+q_ixy+v_iy^2$,比较两边 x^4 和 y^4 的系数,得 $k_1=k_2=0$,$v_1=v_2=0$,所以 $s_i(x,y)=q_ixy$ ⑫

又在⑩中,令 $t_i(x,y)=\alpha_ix+\beta_iy$,比较两边 x^2 和 y^2 的系数,得 $t_i(x,y)=0$ ⑬



此时，⑨式可化为 $q_1^2+q_2^2=-3$.

这与实系数的要求矛盾

思考交流

思考题 设 α 是方程 $x^3-3x^2+1=0$ 的最大根，求证：$[\alpha^{1788}]$ 与 $[\alpha^{1988}]$ 都能被17整除

证明 这个三次方程有三个实根，按照从小到大的顺序分别记为 γ、β、α，根据根的定位方法，可以估计出这三个根的存在范围，即

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$2\sqrt{2}$	3
$f(x)$ 的符号		-	+			+

其中 $f(x)=x^3-3x^2+1$，$-1<\gamma<-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<\beta<1$，$\alpha<2\sqrt{2}$.

由 $f(1-\alpha)=(1-\alpha)^3-3(1-\alpha)^2+1=-\alpha^3+3\alpha+1=-2\alpha^3+(\alpha^3-3\alpha^2+1)=-2\alpha^3>0$，故 $1-\alpha<\beta$.

于是 $\alpha+\beta>1$，又由根与系数的关系可得（注意 $-6\alpha+\alpha^2+\frac{2}{\alpha}=-\alpha^3$）

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(3-\alpha)^2+\frac{2}{\alpha}=1+(8-\alpha^3)<1\text{（因为 }\alpha^3>8\text{）}.$$

令 $S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n(n\geqslant 0)$，直接计算得 $S_0=3$，$S_1=\alpha+\beta+\gamma=3$，$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9$，且据牛顿公式，有 $S_{n+3}=3S_{n+2}-S_n$，据此知对一切非负整数 n，S_n 都是整数

下面证明：对于 $n>1$，有 $0<\gamma^n+\beta^n<1$.

此不等式左边不等号成立是因为 $|\gamma|<\beta$，右边的不等号当 $n=1$ 时是因为 $\gamma+\beta=3-\alpha<1$，当 $n\geqslant 2$ 时是因为 $\gamma^n+\beta^n\leqslant|\gamma|^n+\beta^n\leqslant\gamma^2+\beta^2<1$，故由 $\alpha^n=S_n-(\gamma^n+\beta^n)$ 知，对一切 $n\in\mathbf{N}$，有 $[\alpha^n]=S_n-1$

下面只要证明 $S_{1788}-1$ 与 $S_{1988}-1$ 均能被17整除即可.

S_n 每一项除以17，所得余数构成的数列 $\{t_n\}$：3，3，9，7，1，11，9，9，16，5，6，2，1，14，6，0，3，3，9，…是以16为周期的周期数列，即 $t_{n+16}=t_n$，而 $1788=16\times 111+12$，$1988=16\times 124+4$，所以 $t_{1788}=t_{12}=1$，$t_{1988}=t_4=1$，故 $S_{1788}-1$ 与 $S_{1988}-1$ 均能被17整除，命题得证

同步检测11

1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程 $5x^3-6x^2+7x+8=0$ 的3个根,计算 $(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_3^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1^2)$.

2. 解方程组 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^5+y^5+z^5=3 \end{cases}$.

3. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是整系数多项式,$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个根,且 $p^i \mid a_i\ (i=1, 2, \cdots, n)$,$p$ 为整数. 求证:对任何 $k\in \mathbf{N}^*$,$p^k \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^k$.

4. 对任何非负整数 n,求证:$[(1+\sqrt{3})^{2n+1}]$ 能被 2^{n+1} 整除.

5. 找出数 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 的十进制表达式中紧靠小数点右边一位数字(即第一位小数)和左边一位数字(即个位数),并证明你的结论.

6. 设非零实数 a, b, c 满足条件 $a+b+c=0$. 求证:

$$\frac{(a^7+b^7+c^7)^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)(a^5+b^5+c^5)}=\frac{49}{60}$$

7. 设 $x_i\ (i=1, 2, 3, 4)$ 为实数,且 $\sum_{i=1}^{4} x_i=\sum_{i=1}^{4} x_i^7=0$,求下面式子 $u=x_4(x_4+x_1)(x_4+x_2)(x_4+x_3)$ 的值.

8. 非负实数 p, q, r 满足 $p+q+r=1$. 求证:$7(pq+qr+rq)\leqslant 2+9pqr$.

9. 求出满足下列条件的一切二元多项式 P:

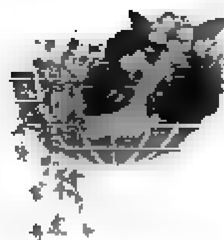
(1) P 是 n 次齐次多项式;

(2) 对一切实数 a, b, c,有 $P(a+b, c)+P(b+c, a)+P(c+a, b)=0$;

(3) $P(1, 0)=1$.

10. 对每个 $n\in \mathbf{N}^*$,是否存在非零 n 元整系数多项式 P 和 Q,使得 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)=Q(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2)$.





答 案

同步检测 1

1. D 2. B 3. C 4. B 5. A 6. A

7. $-\frac{1}{2}$

8. $\{x \mid x=k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$

9. k

10. $\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}, \frac{3\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4}\right]$

11. $\sqrt{2}$

12. 3^{4n}

13. 记 $w=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $w^3=1$．于是 $z=\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=\left[\sqrt{3}i\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^n=(\sqrt{3})^n\cdot i^n\cdot w^n$，所以当 $n=3k(k\in \mathbf{N}^*)$ 时，z 为纯虚数．

14. 因为 $z+u=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$，所以 $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=\frac{4}{5},\\ \sin\alpha+\sin\beta=\frac{3}{5},\end{cases}$

即 $\begin{cases}2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{4}{5},\\ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{3}{5},\end{cases}$ 所以 $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$，故 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{24}{7}$．

15. 由题设，$9=|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$，$27=|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2$，所以，有 $|z_1|^2+|z_2|^2=18$，$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-9$．

又 $|z_1|=3$，所以 $|z_2|=3$，$|z_1\overline{z_2}|=|\overline{z_1}z_2|=9$．设 $z_1\overline{z_2}=9(\cos\theta+i\sin\theta)$，则有 $18\cos\theta=-9$，所以 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$．于是不妨设 $z_1\overline{z_2}=9w$，其中 w 为 1 的三次单位虚根，则 $\overline{z_1}z_2=9w^2$．所以 $(z_1\overline{z_2})^{2000}+(\overline{z_1}z_2)^{2000}=9^{2000}(w^{2000}+w^{4000})=9^{2000}(w^2+w)=-9^{2000}$．



故 $\log_3|(z_1\overline{z_2})^{2000}-(z_1z_2)^{2000}|=\log_3 9^{2000}=4000$

16 (1) $zu=(1-\cos\theta+i\sin\theta)(a^2+ai)=[a^2(1-\cos\theta)-a\sin\theta]+[a(1-\cos\theta)+a^2\sin\theta]i$. 又 zu 为纯虚数,则
$$\begin{cases}a^2(1-\cos\theta)-a\sin\theta=0, & ①\\ a(1-\cos\theta)+a^2\sin\theta\neq0. & ②\end{cases}$$

由②知 $a\neq0$,又 $0<\theta<2\pi$,所以 $1-\cos\theta\neq0$,于是 $a=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$,$\tan(\arg u)=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}=\tan\frac{\theta}{2}$. 显然 $\theta\neq\pi$,当 $0<\theta<\pi$ 时,$a>0$,$\arg u\in(0,\frac{\pi}{2})$,所以 $\arg u=\frac{\theta}{2}$;当 $\pi<\theta<2\pi$ 时,$a<0$,$\arg u\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$,所以 $\arg u=\pi+\frac{\theta}{2}$.

(2) $w=(z+u)^2$,$z+u=(1-\cos\theta+a^2)+(a+\sin\theta)i$. 若 $w\in\mathbf{R}^+$,则 $z+u\in\mathbf{R}$,于是 $a+\sin\theta=0$. 又 $a=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$,且 $\sin\theta\neq0$,所以 $1+\frac{1}{1-\cos\theta}=0$,即 $\cos\theta=2$,这不可能. 故 w 不可能为正实数.

17 由 $|z^3-3z-2|\geq0$,故当 $z=-1$ 时,$|z^3-3z-2|_{\min}=0$;又 $|z^3-3z-2|=|z+1|^2\cdot|z-2|$,且 $|z+1|^2=(z+1)(\bar z+1)=2+2\mathrm{Re}(z)$,$|z-2|^2=(z-2)(\bar z-2)=5-4\mathrm{Re}(z)$. 令 $z=x+yi$,$x,y\in\mathbf{R}$,$x\in[-1,1]$,故
$$|z^3-3z-2|=(2+2x)\sqrt{5-4x}\leq\left[\frac{(2+2x)+(2+2x)+(5-4x)}{3}\right]^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}.$$
当且仅当 $z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 时,$|z^3-3z-2|_{\max}=3\sqrt{3}$.

18 构造复数 $z_1=x+yi$,$z_2=a+bi$,则 $|z_1|=1$,$|z_2|=\sqrt{2}$. 又 $z_1^2=x^2-y^2+2xyi$,$z_1^2z_2=a(x^2-y^2)-2bxy+[b(x^2-y^2)+2axy]i$,所以 $b(x^2-y^2)+2axy=\mathrm{Im}(z_1^2z_2)$. 故 $|b(x^2-y^2)+2axy|=|\mathrm{Im}(z_1^2z_2)|\leq|z_1^2z_2|=|z_1|^2\cdot|z_2|=\sqrt{2}$.

19 由 $\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}=|(2k-1)+a_ki|$,$k=1,2,\cdots,n$,得 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}=\sum\limits_{k=1}^{n}|(2k-1)+a_ki|\geq\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)i\right|=|n^2+17i|=\sqrt{n^4+17^2}$,显然等号可以取到,故 $S_n=\sqrt{n^4+17^2}>0$.

若 $S_n\in\mathbf{Z}$,则有 $(S_n-n^2)(S_n+n^2)=17^2$,于是有 $S_n-n^2=1$ 且 $S_n+n^2=17^2$,解得 $n=12$.

20. 若 $n<0$,由 $|z^{2n}-1|=|z^{-2n}-1|$ 知,只需考虑 $n\geq0$ 的情形.

当 $n=0$ 时,$|z^{2n}-1|=0$,结论成立;

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,由题设,$\cos\theta$,$\sin\theta$ 均为有理数,且
$$|z^{2n}-1|=|\cos2n\theta+i\sin2n\theta-1|=|2\sin n\theta|=\left|2\cdot\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n-(\cos\theta-i\sin\theta)^n}{2i}\right|$$
$$=|2[C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots]|$$
由 $\cos\theta$,$\sin\theta$ 为有理数,所以上式为有理数,即 $|z^{2n}-1|$ 为有理数.

同步检测2

1. C 2. C 3. A 4. D 5. B 6. C

7. 4

8. $\sqrt{5}+1$，$\sqrt{5}-1$

9. 以$(1,0)$为圆心，1为半径的圆

10. π

11. $\frac{\pi}{2}$

12. 3

13. 由复数开方的几何意义，三点所对应的复数必满足方程$(x+a)^3=b$（a，b为复数），则有$x^3+px+1=(x+a)^3-b=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3-b$

由此得$3a=0$，$3a^2=p$，$a^3-b=1$，即$a=0$，$p=0$，$b=-1$。故原方程为$x^3+1=0$，从而可知，此三点对应的正三角形面积即为半径是1的圆内接正三角形面积，等于$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

14. 依题意，知$2a=6$，$F(2,0)$，所以z_B满足方程$|z_B-2|+|z_B+2|=6$。设点A对应复数z，则$z_B-2=(z-2)(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=(z-2)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$，$z_B+2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(z-2\sqrt{3}i)$，所以$|z_B-2|+|z_B+2|=|z-2|+|z-2\sqrt{3}i|$，故$A$的轨迹方程为$|z-2|+|z-2\sqrt{3}i|=6$，$A$的轨迹是以点$(2,0)$，$(0,2\sqrt{3})$为焦点，长轴长为6的椭圆

15. 设$z=3(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$\bar{z}=3(\cos\theta-i\sin\theta)$，$\frac{1}{z}=\frac{1}{3}(\cos\theta-i\sin\theta)$，这说明$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$同向，从而$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}-S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot|\sin2\theta|-\frac{1}{2}|OA|\cdot|OC|\cdot|\sin2\theta|=4|\sin2\theta|\leqslant4$，故当$\theta=\frac{\pi}{2}$时$S_{\triangle ABC}$的最大值是4.

16. 同时满足方程$\arg(z+a+ai)=\frac{\pi}{4}$，$\arg(z-a-ai)=\frac{5\pi}{4}$的复数表示线段$AB$上的点$P$，其中$A(a,a)$，$B(-a,-a)$。$\arg(z-b+bi)$可视为$x$轴正方向到射线$CP$所成的角，其中$C(b,-b)$，而$AC$，$BC$的斜率为$k_{AC}=\frac{a+b}{a-b}$，$k_{BC}=\frac{a-b}{a+b}$，所以$\arg(z-b+bi)$的取值范围是$[\arctan\frac{a+b}{a-b},\arctan\frac{a-b}{a+b}+\pi]$

17. 所求动圆圆心的轨迹方程为$|z-(-1+i)|+|z-(1-5i)|=12$，它表示的是以$(-1,1)$与$(1,-5)$为焦点，长轴长为12的椭圆

18. 设n点对应的复数是$z_k(k=1,2,\cdots,n)$，以n点的重心为原点建立复平面，则$\sum_{k=1}^{n}z_k=0$，$\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k=0$。令$P$点对应复数$z$，则常数$l=\sum_{k=1}^{n}|z-z_k|^2=n|z|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$，

即有$|z|^2=\frac{1}{n}(l-\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2)$，所以当$l>\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$时，轨迹是以重心为圆心的圆；当$l=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$时，仅有一点，即重心；当$l<\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$时，无轨迹



19 设 $z=\quad i(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x\quad yi=a\cos^4t\cdot i+2\left(\frac{1}{2}+bi\right)\cdot\cos^2t\cdot\sin^2t+(1+ci)\cdot\sin^4t$，

所以 $x=\cos^2t\cdot\sin^2t+\sin^4t=\sin^2t$，
$y=a(1-x)^2+2b(1-x)x+cx^2\ (0\leqslant x\leqslant 1)$。

即 $y=(a\quad 2b\ x^2+2(b-a)x+a$ 因 A、B、C 不共线，所以 $a+c-2b\neq 0$，可见所给曲线是抛物线弧 AB、BC 的中点坐标分别是 $D\left(\frac{1}{4},\frac{a+b}{2}\right)$ 与 $E\left(\frac{3}{4},\frac{b+c}{2}\right)$，所以直线 DE 的方程为 $y=(c-a)x+\frac{1}{4}(3a+2b-c)$

联立直线与抛物线弧的方程，得 $(a+c-2b)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$，解得 $x=\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$，所以抛物线弧与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线 DE 有且只有一个公共点，此点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{a+c+2b}{4}\right)$

20 可利用平移，把 S_1 点移到原点 O，整个三角形移到第一象限(OS_2 边在 x 轴上)，成为 $\triangle OS_2S_3$，显然，这样做不影响问题的实质

于是，O 对应 $\quad S_2$ 对应 $a\quad m\quad t$，S_3 对应 $a-m+(n-b)i=t+fi$，$t,f\in\mathbf{R}^+$ 点 Z 满足 $\frac{1}{z}+\frac{1}{z-t}+\frac{1}{z-t-fi}=0$ ①

以下用反证法证明，点 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$ 必在 $\triangle OS_2S_3$ 的内部

代入得

$$式①左边=\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{(x-t)+iy}+\frac{1}{(x-t)-(y-f)i}$$
$$=\frac{x-yi}{x^2+y^2}+\frac{(x-t)-yi}{(x-t)^2+y^2}+\frac{(x-t)-(y-f)i}{(x-t)^2+(y-f)^2}$$
$$=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x-t}{(x-t)^2+y^2}+\frac{x-t}{(x-t)^2+(y-f)^2}$$
$$+i\left(-\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{y}{(x-t)^2+y^2}-\frac{y-f}{(x-t)^2+(y-f)^2}\right)\quad ②$$

如图，作 $S_3Q\perp y$ 轴

1）对于矩形 OS_2S_3Q 以外的点

$y\leqslant 0$ 时，虚部均非负(至少一个为正)；

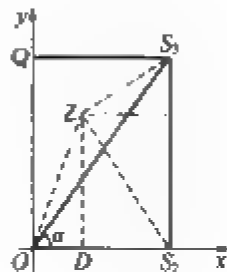
$x\leqslant 0$ 时，实部均非正(至少一个为负)；

$x\geqslant t$ 时，实部均非负(至少一个为正)；

$y\geqslant f$ 时，虚部均非正(至少一个为负)

从而，其和必不能为零，即式①不能成立

故满足式①的点 Z 不能在矩形 OS_2S_3Q 之外(包括边界上)。



(2) 当点 Z 在 $\triangle OS_3Q$ 内部时，$ZD\perp x$ 轴，令 $\angle S_3OS_2=\alpha$，$\angle OZD=\theta$，$\angle S_2ZD=\varphi$，$\angle ZS_2S_3=\psi$，则有 $0<\theta<\frac{\pi}{2}-\alpha<\psi<\frac{\pi}{2}$，故 $0<\sin\theta<$



$\sin\phi$, $\cos\theta > \cos\phi > 0$

而 ②式实部 $= \frac{|OD|}{|OZ|} + \frac{|OD| \cdot |OS_2|}{|S_2Z|^2} + \frac{|OD| \cdot |OS_2|}{|S_2Z|}$

$= \frac{\sin\theta}{|OZ|} \quad \frac{\sin\phi}{|S_2Z|} \quad \frac{\sin\varphi}{|S_2Z|}$

②式虚部 $\frac{\cos\theta}{|OZ|} + \frac{\cos\phi}{|S_2Z|^2} \quad \frac{\cos\varphi}{|S_2Z|^2}$

于是，当 $|OZ| \geq |S_2Z|$ 时 $\sin\theta < \sin\phi$, $\sin\varphi$

所以 $\frac{\sin\theta}{|OZ|} > \frac{\sin\phi}{|S_2Z|}$，故实部必小于零

仿此，当 $|OZ| < |S_2Z|$ 时，虚部必小于零

总之，满足式①的点 Z 不能在$\triangle OS_2Q$内。

所以，满足式①的点 Z 必位于$\triangle OS_1S_2$内部

同步检测3

1. B 2. D 3. B 4. C 5. B 6. C

7. $\sqrt{2+2\sqrt{5}}$

8. -1

9. $(-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10})$

10. 1995003

11. -999

12. 2^n

13. 当 $m=n$ 时，显然 $z\in$ 均是方程的解，当 z 为虚数时，令 $z = r\cos\theta + i\sin\theta$, r ，则有 $(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}$ 1，所以 $\cos\theta+i\sin\theta = \pm(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n})$, k 1, 2, … $n-1$, $n\geq 2$ 此时 z $\pm r(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n})$, $k=1, 2,$ … n … n 2

当 $m\neq n$ 时，方程两边取模，得 z = 不妨设 n m 显然 = 是方程的解 当 $z\neq$ 时，有 z = 1，所以 z 1，从而 z 1 故 z 1 此时 $= \cos\frac{2k\pi}{m\ \ n} + i\sin\frac{2k\pi}{m\ \ n}$, $k=$, 1 , $m+n-$

14. 由韦达定理，得 $\alpha+\beta=$, $\alpha\beta = c+m$ 因 $(\alpha-\beta)$ $= (\alpha+\beta)$ $4\alpha\beta =$ 4 $4m$，所以 α β = $4m$ … $|z$ $| = 28$ 即 m $(4+5i)| = 7$ 由此易求得 $|m|_{max} = \sqrt{41}+7$, $|m|_{min} = 7-\sqrt{41}$

15 若 6 $(n-2)$ 时，取 $\omega = e^{\frac{\pi}{3}i}$，则 ω^{n+1} ω^{n} = … = e $e^{\frac{\pi}{3}}$ 1 $\cos\frac{2\pi}{3}$ $\cos\frac{4\pi}{3}$ 1) + $i(\sin\frac{5\pi}{3}$ $\sin\frac{4\pi}{3})$ = 即 $\omega = e$ 是方程 z^n = 的模为1的复根



若方程 $z^{n+1}-z^n-1=0$ 有根 ω 且 $|\omega|=1$，则 $\omega^{n+1}-\omega^n-1=0$，即 $\omega^n(\omega-1)=1$，两边取模有 $|\omega^n|\cdot|\omega-1|=1$，即 $|\omega-1|=1$，故 ω 为圆 $|z|=1$ 与圆 $|z-1|=1$ 的交点所对应的复数，从而 $\omega=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$，因此 $\omega^k=1$ 当且仅当 $6|k(k\in\mathbb{Z})$.

又因 $\omega^3=-1$，而 $\omega\neq 1$，故 $\omega^2-\omega+1=0$，即 $\omega-1=\omega^2$.

由 $\omega^{n+1}-\omega^n-1=0$，有 $0=\omega^n(\omega-1)-1=\omega^n\cdot\omega^2-1$，即 $\omega^{n+2}=1$，故 $6|(n+2)$.

综上，命题成立.

16. 易知 $|AB|=|AC|$ 且 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$，故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

设 $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$，则以斜边 BC 为直径的圆的方程是 $x(x-2)+(y+1)(y-3)=0$，即 $x^2+y^2-2x-2y-3=0$. 设 $\alpha=a+bi$，$\beta=c+di(a,b,c,d\in\mathbb{R})$，代入已知方程，变形得 $x^2+y^2+2ax-2by+c+di=0$. 于是，有 $d=0$ 且 $x^2+y^2+2ax-2by+c=0$. 对比系数，可得 $a=-1$，$b=1$，$c=-3$. 故 $\alpha=-1+i$，$\beta=-3$.

17. 由 $|z|=1$ 可设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，从而由 $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=\cos\theta+i\sin\theta$，

于是 $\frac{1+ix}{1-ix}=\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，应用合分比定理，得

$$ix=\frac{1-\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}-i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}}{1+\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$$=\frac{2\sin^2\frac{\theta+2k\pi}{2n}-2i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2n}\cos\frac{\theta+2k\pi}{2n}}{2\cos^2\frac{\theta+2k\pi}{2n}+2i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2n}\cos\frac{\theta+2k\pi}{2n}}$$

$$=\tan\frac{\theta+2k\pi}{2n}\cdot\frac{\sin\frac{\theta+2k\pi}{2n}-i\cos\frac{\theta+2k\pi}{2n}}{\cos\frac{\theta+2k\pi}{2n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2n}}$$

$$=\tan\frac{\theta+2k\pi}{2n}$$

由 $k=0,1,2,\cdots,n-1$，便可得出原方程的 n 个不同的实数根：$\tan\frac{\theta}{2n}$，$\tan\frac{\theta+2\pi}{2n}$，$\cdots$，$\tan\frac{\theta+2(n-1)\pi}{2n}$.

18. 设方程 $x^3-x^2+ax-b=0$ ① 的3个正根为 x_1,x_2,x_3，又设方程 $x^3-x^2+bx+a=0$ ② 的3个根为 y_1,y_2,y_3，由韦达定理得 $x_1+x_2+x_3=1$， ③

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=a, \quad ④$$

$$x_1x_2x_3=b, \quad ⑤$$

$$y_1+y_2+y_3=1, \quad ⑥$$

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=b, \quad ⑦$$

$$y_1y_2y_3 = -a. \quad ⑧$$

由④、⑤知 $a<0$，$b>0$，因此方程②的系数恰好正负相间，这说明方程②不可能有负数根和零根。由于方程②是三次方程，故它必有一实根，此根只可能是正根。

为证方程②还有一对共轭虚根，只需证明它不可能有3个正根。以下应用反证法。假设 $y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R}^+$。由⑥、⑧知 $1 = y_1 + y_2 + y_3 \geqslant 3\sqrt[3]{y_1y_2y_3} = 3\sqrt[3]{-a}$，

所以 $0<-a\leqslant \frac{1}{27}$。 ⑨

由⑦知 $b\geqslant 3\sqrt[3]{y_1^2y_2^2y_3^2} = 3\sqrt[3]{a^2}$，同理由④、⑤可得 $(-a)^2 \geqslant \frac{?}{?}b$，所以 $9\sqrt[3]{a^2} \leqslant b \leqslant \frac{1}{27}(-a)$，

从而 $(-a)^3 \geqslant 3^6 \cdot a^4$，即 $-a\geqslant 27$，与⑨矛盾。故命题得证。

19. (1) 由虚根成对定理，可知 $\alpha - \beta i$ 也是方程的根，于是 $\begin{cases} a+b+c = 2\alpha \\ ab+bc+ca = \alpha^2+\beta^2 \end{cases}$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $c = 2\alpha-(a+b)$。令 $a+b=u$，则 $\alpha^2+\beta^2 = ab+u(2\alpha-u)\leqslant \frac{1}{4}u^2+u(2\alpha-u)$，

于是有 $-\frac{3}{4}u^2+2\alpha u>\alpha^2$，解这个不等式，可知 $\frac{2}{3}\alpha<u<2\alpha$，从而 $c=2\alpha-(a+b)>0$，所以 a、b、c 都是正实数。

(2) 只需证明 $\sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$。

由条件，可知 $a(b+c)+bc = \alpha^2+\beta^2 > \alpha^2 = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2$，即 $(a+b+c)^2-4a(b+c)<4bc$，从而 $a^2-2(b+c)a+(b-c)^2<0$，于是，由求根公式，可知 $a<(b+c)+\sqrt{(b+c)^2-(b-c)^2} = b+c+2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$。所以，存在一个以 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 为边长的三角形。

20. 由条件可知 $\lambda\neq 0$，$\lambda\neq 1$。

因为 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$，$\lambda^{n+1}+a_{n-1}\lambda^n+\cdots+a_0\lambda=0$，

所以 $-\lambda^{n+1}+(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_1-a_0)\lambda+a_0=0$，即 $\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_1-a_0)\lambda+a_0$，其中等式右边的系数均为非负实数。两边取模，并利用复数模不等式，有

$$\begin{aligned}
|\lambda^{n+1}| &= |(1-a_{n-1})\lambda^n+(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}+\cdots+(a_1-a_0)\lambda+a_0| \\
&\leqslant |(1-a_{n-1})\lambda^n|+|(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}|+\cdots+|(a_1-a_0)\lambda|+|a_0| \\
&= |1-a_{n-1}|\cdot|\lambda^n|+|a_{n-1}-a_{n-2}|\cdot|\lambda^{n-1}|+\cdots+|a_1-a_0|\cdot|\lambda|+|a_0| \\
&\leqslant |1-a_{n-1}|\cdot|\lambda^n|+|a_{n-1}-a_{n-2}|\cdot|\lambda^n|+\cdots+|a_1-a_0|\cdot|\lambda^n|+|a_0|\cdot|\lambda^n| \\
&= (|1-a_{n-1}|+|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+|a_1-a_0|+|a_0|)\cdot|\lambda^n| \\
&= |(1-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_1-a_0)+a_0|\cdot|\lambda^n| = |\lambda^n|,
\end{aligned}$$

即有 $|\lambda|\leqslant 1$，而 $|\lambda|\geqslant 1$，因此 $|\lambda|=1$。

上面不等式均成为等式，从而有 $\arg(1-a_{n-1})\lambda^n = \arg(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1} = \cdots = \arg(a_1-a_0)\lambda = \arg a_0 = 0$，故 $(1-a_{n-1})\lambda^n\geqslant 0$，$(a_{n-1}-a_{n-2})\lambda^{n-1}\geqslant 0$，…，$(a_1-a_0)\lambda\geqslant 0$，$\lambda^{n+1}=(1-a_{n-1})\lambda^n+a_{n-1}$



[illegible]

同步检测 4

1. (1) 由 $z^2+z+1=0$，得 $z^3=1$ 且 $z\neq 1$，故 [illegible] $=2$ [illegible]

(2) 由题设，得 [illegible] 2ω，其中 ω 为 1 的 [illegible] 次单位虚根，故 [illegible] $+2=$ [illegible] $=6$

2. 由于 [illegible] 与 [illegible] 的最小公倍数是 144，[illegible] $=1$ [illegible]，所以集合 C 中共有 [illegible] 个元素

3. 由于 [illegible] $=0$，知 [illegible] $=1$，ω 为 1 的 [illegible] 次单位虚根，于是

[illegible]

所以 [illegible]

4. 设 [illegible] 是 [illegible] 个 [illegible] 次单位虚根，则

[illegible] $=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$

把 [illegible] 代入题设等式，得
$$\begin{cases} P(1)+\varepsilon_1 Q(1)+\varepsilon_1^2 R(1)=0, \\ P(1)+\varepsilon_2 Q(1)+\varepsilon_2^2 R(1)=0, \\ P(1)+\varepsilon_3 Q(1)+\varepsilon_3^2 R(1)=0 \end{cases}$$

这表明二次方程 [illegible] $R(1)+$ [illegible] $Q(1)+P(1)=0$ 有 3 个不同的根 [illegible]，所以

$P(1)=Q(1)=R(1)=0$

再把 [illegible] 代入题设等式，又得 [illegible]，于是，由因式定理，$x-1$ 是 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 及 [illegible] 的公因式

5. 记 [illegible] -1，[illegible] 是任一 5 次虚单位根，则

[illegible] $-1=0$

于是 $f(x)$ 必有因式 [illegible]，由此可用拆项法得长除法分解

[illegible]

6. 设 [illegible] 是全部 $2m+1$ 次单位根，[illegible] $=\cos\frac{2k\pi}{2m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2m+1}$，[illegible] $2m$

因为 [illegible]，且 [illegible] $=2\cos\frac{2k\pi}{2m+1}$

所以



$$x^{2m+1}-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{2m-1})(x-\varepsilon_{2m})$$
$$=(x-1)[(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_{2m})][(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_{2m-1})]\cdots[(x-\varepsilon_m)(x-\varepsilon_{m+1})]$$
$$=(x-1)\left[x^2-2\left(\cos\frac{2\pi}{2m+1}\right)x+1\right]\cdots\left[x^2-2\left(\cos\frac{2m\pi}{2m+1}\right)x+1\right].$$

7. 由 $x^{m+1}-1=(x-1)g(x)$，得 $g(x)=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_m)$，这里 $\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{m+1}(1\leqslant k\leqslant m)$。显然，当 $k\neq j$ 时，$\varepsilon_k\neq\varepsilon_j$。于是，$g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 $f(\varepsilon_k)=0$，$k=1,2,\cdots,m$。而 $f(x)=\frac{x^{n(m+1)}-1}{x^n-1}$，可知 $g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 $\varepsilon_k^{n(m+1)}-1=0$ 且 $\varepsilon_k^n\neq1$。

因为 $\varepsilon_k^{n(m+1)}-1=0$ 对任意 $n\in N^*$ 都成立，所以 $g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 $\varepsilon_k^n=\cos\frac{2kn\pi}{m+1}+i\sin\frac{2kn\pi}{m+1}\neq1$，其中 $k=1,2,\cdots,m$。从而，必须且只须 n 与 $m+1$ 互质。

综上可知，所有使得 $g(x)\mid f(x)$ 的正整数 m，n 应为 $\{(m,n)\mid m\in N^*,n\in N^*,n$ 与 $m+1$ 互质$\}$。

8. 因 $x^7-1=0$ 的七个根为 $\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}(k=0,1,2,\cdots,6)$，由韦达定理得上面七个根之和为0，于是，有 $1+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{12\pi}{7}=0$，再由诱导公式易求得 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$。

9. 由题意，可将 $f(x)$ 表示为 $f(x)=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$，式中 $c_0=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，显然有 $|c_0|=1$。

设 $x^n=c_0$ 的根是 $x_j=\varepsilon_jx_0$，当中 $\varepsilon_j=\cos\frac{2j\pi}{n}+i\sin\frac{2j\pi}{n}$。

于是，由 $|\varepsilon_j|=|c_0|=1$，得 $|x_j|=1$。从而

$$\sum_{j=0}^{n-1}|f(x_j)|\geqslant\left|\sum_{j=0}^{n-1}f(x_j)\right|=\left|\sum_{j=0}^{n-1}x_j^n+c_{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}x_j^{n-1}+\cdots+c_1\sum_{j=0}^{n-1}x_j+nc_0\right| \qquad (*)$$

由 $\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_j^k=0\ (1\leqslant k<n)$，

知 $(*)$ 式的右端为 $|nc_0+c_0n|=2n$，即有 $\sum_{j=0}^{n-1}|f(x_j)|\geqslant2n$。

从而可知，存在 x_j，使 $|f(x_j)|\geqslant2$，且 $|x_j|=1$。

10. 取 $\theta\in R$，使得 $|e^{i\theta}C_0+C_n|=|C_0|+|C_n|$。设 ε 为 n 次单位根，且 $\varepsilon\neq1$，则利用单位根的性质得

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(\varepsilon^ke^{\frac{i\theta}{n}})=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n}C_j(\varepsilon^ke^{\frac{i\theta}{n}})^{n-j}=\sum_{j=0}^{n}C_j\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k(n-j)}e^{\frac{i(n-j)\theta}{n}}$$
$$=nC_0e^{i\theta}+nC_n$$

于是，$\sum_{k=0}^{n-1}|f(\varepsilon^ke^{\frac{i\theta}{n}})|\geqslant|nC_0e^{i\theta}+nC_n|=n(|C_0|+|C_n|)$，从而存在 $k\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，使得



$f(e^{i\theta}) = C + C_1$，令 $z = e^{i}\cdot e^{i\theta}$，即得结论

11. 因为 $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$，$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$，所以 $\tan\alpha = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}} = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{2}{e^{2i\alpha}+1}\right)$，令 $\alpha = \theta + \frac{k}{n}\pi$，$k = 1, 2, \cdots, n$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\tan\left(\theta + \frac{k}{n}\pi\right) = \frac{1}{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{2}{e^{\cdots}+1}\right)$

$= \frac{n}{i} - \frac{2}{i}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{e^{\cdots}+1}$

注意到 $\sum \frac{1}{x_k + 1} = \cdots [n + (n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + (n-2)\sum x_{i_1}x_{i_2} + (n-3)\sum x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3} + \cdots +$

$\sum x \cdots x \cdots \prod\limits_{i=1}^{n} x_i + 1)$，

其中 $\cdots$ 表示从 $1, 2, \cdots, n$ 中每次取 k 个数组成的所有组合形式，从而

$\sum \frac{1}{e^{\cdots}+1} = \cdots [n + (n-1)\sum e^{\cdots} + (n-2)\sum e^{\cdots} \cdots e^{\cdots} + \cdots$

$\sum e^{\cdots} \cdots e^{\cdots} \cdots \prod\limits_{k=1}^{n} e^{\cdots} + 1]$

另一方面 $\cdots - e^{\cdots} = 0$ 的 n 个不同根是 $e^{\cdots}, e^{\cdots}, \cdots, e^{\cdots}$，由韦达定理，知 $\sum e^{\cdots}$

$\sum e^{\cdots} \cdots = 0$，$\cdots \sum e^{\cdots} \cdots e^{\cdots} = 0$，

$\prod e^{\cdots} \cdots e^{\cdots}$

又由于 $\prod \cdots e^{\cdots} = z^{n} - e^{\cdots}$，令 $\cdots 1$，有 $\prod\limits_{k=1}^{n}\left(-1 - e^{\cdots}\right) = (-1)^{n} - e^{\cdots}$，即

$\prod \cdots e^{\cdots} \cdots [\cdots e^{\cdots}]$

为此 $\sum \tan\left(\theta + \frac{k}{n}\pi\right) = \frac{n}{i} - \frac{2}{i}\cdot\frac{n}{(\cdots) e^{\cdots} + 1}$

当 n 为奇数时 $\sum \tan\left(\theta + \frac{k}{n}\pi\right) = \frac{n}{i} - \frac{2}{i}\cdot\frac{n}{e^{\cdots}+1} = \frac{n}{i}\left(1 - \frac{2}{e^{2i\theta}+1}\right)$

$= n\tan\theta$

当 n 为偶数时，$\sum \tan\left(\theta + \frac{k}{n}\pi\right) = \frac{n}{i} - \frac{2n}{i(\cdots e^{\cdots} - 1)}$

$\frac{n}{i}\left(\cdots \frac{2}{e^{\cdots}-1}\right) = \frac{n}{i}\cdot\frac{e^{\cdots}+1}{e^{\cdots}-1} = \frac{n}{i}\cdot\frac{1}{\tan\theta} = -n\cot\theta$

12. 由条件，可知 $SA_1 = SA_2 = \cdots = SA_n$，于是，成立如下等价关系

$\sum SB \cdots = \sum SB$



$$\Leftrightarrow \sum SB_{2i} \cdot SA_{2i} = \sum SB_{2i-1} \cdot SA_{2i-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum A_{2i}B_{2i} \cdot SA_{2i} = \sum A_{2i-1}B_{2i-1} \cdot SA_{2i-1}$$

$$\Leftrightarrow \sum (|A_{2i}O|^2 - R^2) = \sum (|A_{2i-1}O|^2 - R^2) \quad ①$$

$$\Leftrightarrow \sum |A_{2i}O|^2 = \sum |A_{2i-1}O|^2. \quad ②$$

其中，①用到割线定理，O 表示题中过 S 的球的球心，R 为球半径．为证明原题，只需证明②成立，这只要证 $\sum |A_{2i}P|^2 = \sum |A_{2i-1}P|^2$． ③

其中，P 为 O 在底面的射影．为此设正 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 的中心 O' 为复平面上的原点，而 A_k 为 ε_k（$2n$ 次单位根）对应的点，点 P 对应的复数为 z，则

$$\sum |A_{2i}P|^2 = \sum |\varepsilon_{2i} - z|^2 = \sum (\varepsilon_{2i} - z)(\overline{\varepsilon_{2i}} - \bar{z})$$

$$= \sum (1 + |z|^2) - z\sum \overline{\varepsilon_{2i}} - \bar{z}\sum \varepsilon_{2i}$$

$$= \sum (1 + |z|^2) = \sum |A_{2i-1}P|^2. \quad ④$$

成立，这是由于 $x^{2n} - 1 = (x^n - 1)(x^n + 1)$，其中 ε_{2i-1}（$1 \leqslant i \leqslant n$）是 $x^n + 1 = 0$ 的根，当 $n \geqslant 2$ 时，由韦达定理知 $\sum \varepsilon_{2i-1} = 0$，而 ε_{2i}（$1 \leqslant i \leqslant n$）为 $x^n - 1 = 0$ 的根，同样有 $\sum \varepsilon_{2i} = 0$，所以，命题成立．

同步检测 5

1．解　在复平面上，设 P 依次跳到 P_1、P_2、P_3、…、P_n，于是 A、B、C、A、B、C、…依次成为线段 PP_1、P_1P_2、P_2P_3、…、$P_{n-1}P_n$ 的中点．根据线段中点的复数形式，有

$P + P_1 = 2A$， ①

$P_1 + P_2 = 2B$， ②

$P_2 + P_3 = 2C$， ③

$P_3 + P_4 = 2A$， ④

$P_4 + P_5 = 2B$， ⑤

$P_5 + P_6 = 2C$． ⑥

由①得 $P_1 = 2A - P$，

⑦代入②得 $P_2 = 2B - 2A + P$， ⑦

⑧代入③得 $P_3 = 2C - 2B + 2A - P$， ⑧

⑨代入④得 $P_4 = 2B - 2C + P$， ⑨



⑩代入⑤得 $P = 2C$ [illegible] P,　　⑩

⑪代入⑥得 $P_7 = P$　　⑪

继续上述过程,则有 $P_8 = P_2$, $P_9 = P_3$, …,呈周期现象:

$P_{6k} = P$,

P_{6k} [illegible] P_1 [illegible] $2A$ [illegible] P,

P_{6k} [illegible] $= P = 2B$ [illegible] $2A + P$

$P_{6k+3} = P = 2C$ [illegible] $2B$ [illegible] P

P_{6k} [illegible] $= P_4 = 2B$ [illegible] $2C + P$,

P_{6k} [illegible] $= P = 2C$ [illegible] P

这里 k 为非负整数 由此知 $P_{1991} = P_{6\times 331+5} = 2C$ [illegible] P

故 $|P_{1991}P| = |(2C - P) - P| = 2|C - P|$

$= 2|CP| = 2 \times 27 = 54$

2. 置三角形于复平面,并设 $\overrightarrow{AB}$ [illegible] z_1, $\overrightarrow{BC} = z_2$, $\overrightarrow{CA} = z_3$,则 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$,

而 $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(z_1 - z_3)$,

同理 $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(z$ [illegible] z [illegible] $)$

故 $AB^2 + BC^2 + CA^2 - 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

$= z$ [illegible] $z + z$ [illegible] $z + z$ [illegible] $z - \frac{1}{3}[(z_1 - z_3)(\overline{z_1} - \overline{z_3}) + (z_2 - z$ [illegible] $)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + (z_3 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z}$ [illegible] $)]$

$\frac{}{3}$ [illegible] $(z$ [illegible] $\overline{z}$ [illegible] z [illegible] $\overline{z}$ [illegible] z [illegible] $\overline{z}$ [illegible] z [illegible] $\overline{z}$ [illegible] $z_1 \cdot \overline{z_3} + \overline{z_1} \cdot z_3 + \overline{z_1} \cdot z_2 + z_2 \cdot \overline{z_3} + \overline{z_2} \cdot z_3$

$= \frac{1}{3}(z$ [illegible] $z + z$ [illegible] $(z - z + z)$ [illegible] $= 0$

则 $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

3 设复数 u, v, w, z 和向量 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ 对应,则有 $u + v + w + z = 0$,于是

$$|uw - vz|^2 = |uw + v(u + v + w)|^2$$

$$= |u + v|^2 \cdot |v + w|^2 \text{ [illegible]}$$

又

$$|uw - vz|^2 = (uw - vz)(\overline{uw} - \overline{vz})$$

$$= |uw|^2 + |vz|^2 - (uw\overline{vz} + \overline{uw}vz),$$

因为 $|uw|$ [illegible] $= ac$ [illegible] $|vz| = bd$ 所以本题转化为证明下列等式

$$uw\overline{vz} + \overline{uw}vz = 2abcd\cos(A + C)$$

这只要检验复数 $uw\overline{vz}$ 和 $\overline{uw}vz$ 的辐角都等于 $\pm(\angle A + \angle C)$ 这是显然的

4 置图形于复平面 设 $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$,则 w, $\overline{w}$ 是 [illegible] 1 的虚立方根,有性质

$$w\overline{w} = 1, \text{ [illegible] } = \text{ [illegible] } w = 1$$

故 z_E [illegible] $\overrightarrow{BE}$ [illegible] $z_B = \overrightarrow{BA} \cdot w + z_B = (z_A$ [illegible] $)w + z_B = wz_A + \overline{w}z_B$

所以 $3z$ [illegible] $= z_A + z_B + z_E = (1 + w)z_A + (1 + \overline{w})z_B$

同理 $z_{O_3} = \frac{1}{3}[(1+w)z_C + \cdots]$

所以 $3\overrightarrow{O_1O_3} = (1+w)(z_C - z_A) + (1+w)(z_D - z_B)$

同理，$3\overrightarrow{O_2O_4} = (1+w)(z_D - z_B) + (1-w)(z_C - z_A)$

所以 $\dfrac{\overrightarrow{O_1O_3}}{\overrightarrow{O_2O_4}} = \dfrac{(z_C - z_A) + w(z_D - z_B)}{(z_D - z_B) - w(z_C - z_A)}$

所以分子与分母共轭的积 $= (z_C - z_A)\overline{(z_D - z_B)} + (z_D - z_B)\cdot\overline{(z_C - z_A)} + w(z_D - z_B)\cdot\overline{(z_D - z_B)} + w(z_C - z_A)\overline{(z_C - z_A)}$

（因为 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$，$= z_{AC}\overline{z_{BD}} + \overline{z_{AC}}z_{BD} + (w - \overline{w})|\overrightarrow{AC}|^2$，显然为纯虚数）

故 $O_1O_3 \perp O_2O_4$

5．证　设$\triangle ABC$的外心O为复平面上的原点，$\triangle ABC$的外接圆半径为1，点A，B，C对应的复数为u，v，w，则$\triangle ABC$的内心I，BC的中点D，AC的中点E对应的复数分别为$z = \dfrac{au + bv + cw}{a + b + c}$，$\dfrac{1}{2}(v + w)$，$z = \dfrac{1}{2}(u + w)$，这里$a$，$b$，$c$为$\triangle ABC$的三边长．

注意到C，O，D，E到$\frac{1}{2}w$对应的复数的距离都为$\frac{1}{2}$，于是，欲证O，D，E，I四点共圆，只需证明$\left|z - \frac{1}{2}w\right| = \frac{1}{2}$，即证$|2z - w| = 1$．由于$a + b = 2c$，于是$2z - w = \dfrac{2au + 2bv - cw}{3c}$，因而只需证$|2au + 2bv - cw| = 3c$．

为此，设$u = e^{i\alpha}$，$v = e^{i\beta}$，$w = e^{i\gamma}$，则

$$c^2 = |u - v|^2 = 2 - (u\overline{v} + \overline{u}v) = 2[1 - \cos(\beta - \alpha)]$$

于是$\cos(\beta - \alpha) = 1 - \frac{1}{2}c^2$，类似可证$\cos(\gamma - \alpha) = 1 - \frac{1}{2}b^2$，$\cos(\gamma - \beta) = 1 - \frac{1}{2}a^2$．

注意到 $|2au + 2bv - cw|^2$

$$= (2au + 2bv - cw)(2a\overline{u} + 2b\overline{v} - c\overline{w})$$

$$= 4a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab(u\overline{v} + \overline{u}v) - 2ac(u\overline{w} + \overline{u}w) - 2bc(v\overline{w} + \overline{v}w)$$

$$= 4a^2 + 4b^2 + c^2 + 8ab\cos(\beta - \alpha) - 4ac\cos(\gamma - \alpha) - 4bc\cos(\gamma - \beta)$$

$$= 4a^2 + 4b^2 + c^2 + 8ab\left(1 - \frac{1}{2}c^2\right) - 4ac\left(1 - \frac{1}{2}b^2\right) - 4bc\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)$$

$$= 4a^2 + 4b^2 + c^2 + 8ab - 4(a + b)c + 2abc(a + b - 2c)$$

$$= 4(a + b)^2 + c^2 - 4(a + b)c$$

$$= 16c^2 + c^2 - 8c^2 = 9c^2$$

所以命题成立．

6．证明　以O为原点O，以OA所在直线为实轴建立复平面，设A，B，C，D及A'，B'，C'，D'各所对应的复数分别为a，b，c，d及a'，b'，c'，d'，则有$a' = ai$，$b' = bi$，$c' = ci$，$d' = di$．

因P为$A'B$的中点，故$\overrightarrow{OP}$所对应的复数为$\frac{1}{2}(a' + b) = \frac{1}{2}(ai + b)$，同理$\overrightarrow{OQ}$所对应的复数为$\frac{1}{2}(bi + c)$，$\overrightarrow{OR}$所对应的复数为$\frac{1}{2}(ci + d)$，$\overrightarrow{OS}$所对应的复数为$\frac{1}{2}(di + a)$，由$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$知所对应的复数

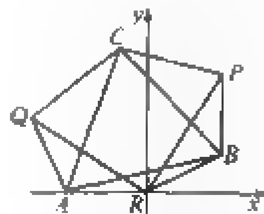


为 $\frac{i}{2}[(d-b)+(c-a)i]$，而 $\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}$ 所对应的复数为 $\frac{1}{2}[(a-c)+(d-b)i]$.

因为 $\frac{i}{2}[(d-b)+(c-a)i]=(-i)\times\frac{1}{2}[(a-c)+(d-b)i]$，所以 $PR\perp QS$，并且 $PR=QS$

7　建立如图所示复平面，只需证明：$z_Q=i\cdot z_P$

设 $z_A=-1$，则　　$z_B=\cos30^\circ+i\sin30^\circ$



第 7 题图

因为 $\frac{BP}{BC}=\frac{AQ}{AC}=\frac{\sin30^\circ}{\sin105^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$，

$$z_P=z_B+\overrightarrow{BP}=z_B+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}(z_C-z_B)\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}，$$

所以　　$z_Q=z_A+\overrightarrow{AQ}$

$$=z_A+\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}(z_C-z_A)\cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$$

容易验证　$z_Q=i\cdot z_P$，故　$\angle PRQ=90^\circ$，$QR=PR$

8　如图所示，只需证 $\arg(\overrightarrow{PF})=\arg(\overrightarrow{P'F})=\frac{1}{2}\cdot B$.



第 8 题图

设 $|BI|=a$，则内切圆半径 $r=a\sin\frac{B}{2}$，$z_I=a\left(\cos\frac{B}{2}+i\sin\frac{B}{2}\right)$，

且 $|BC|=a\cos\frac{B}{2}+r\cot\frac{C}{2}$

$$=\frac{a}{\sin\frac{C}{2}}\sin\frac{B+C}{2}=\frac{\sqrt{3}a}{2\sin\frac{C}{2}}，$$

所以 $z_P=\frac{1}{3}z_C=\frac{\sqrt{3}a}{6\sin\frac{C}{2}}(\cos B+i\sin B)$，

所以 $\overrightarrow{PF}=z_F-z_P=z_F-\frac{\sqrt{3}a}{6\sin\frac{C}{2}}(\cos B+i\sin B)$，

所以 $\tan[\arg(\overrightarrow{PF})]=\frac{\operatorname{Im}(z_F-z_P)}{\operatorname{Re}(z_F-z_P)}$

$$=\frac{\sin B}{4\sin\frac{C}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{B}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{B}{2}\right)-\cos B}$$

$$=\frac{\sin B}{1+\cos B}=\tan\frac{B}{2}，$$

所以 $\arg(\overrightarrow{PF})=\frac{B}{2}$，　故 $\angle BFP=\frac{1}{2}B$.

9　用点的字母表示对应的复数，依据定比分点公式，得

$$M=(1-r)A+rC，N=(1-r)C+rE$$

因为 B、M、N 三点共线，所以有 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & M & N \\ \bar{B} & \bar{M} & \bar{N} \end{vmatrix} = 0$，

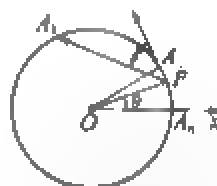
即 $\begin{vmatrix} 1 & (1-r)+r & (1-r)+r \\ B & (1-r)A+rC & (1-r)C+rE \\ \bar{B} & (1-r)\bar{A}+r\bar{C} & (1-r)\bar{C}+r\bar{E} \end{vmatrix} = 0$，

从而可得 $(1-r)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & A & C \\ \bar{B} & \bar{A} & \bar{C} \end{vmatrix} + (1-r)r\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & A & E \\ \bar{B} & \bar{A} & \bar{E} \end{vmatrix} + r^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ B & C & E \\ \bar{B} & \bar{C} & \bar{E} \end{vmatrix} = 0$

注意到 $\triangle BAC$ 和 $\triangle BAE$ 同向，而二者与 $\triangle BCE$ 反向，而又知 $S_{\triangle BAE} = S_{\triangle BCE} = 2S_{\triangle BAC}$，于是，结合上面的关系，便有 $(1-r)^2 + 2(1-r)r - 2r^2 = 0$。

即 $3r^2 - 1 = 0$，解出 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$

10. 解 (1) 设 $A_k = \varepsilon^k (k = 1, 2, \cdots, n)$，$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$，如图所示，$P = e^{i\theta}$，$\left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{n}\right)$



第 10 题图

易知，$\angle A_1PA_k = \frac{\pi}{n}(k-1)$，故 $\arg(\overrightarrow{PA_k} \cdot e^{-\frac{\pi}{n}(k-1)i}) = \arg(\overrightarrow{PA_1})$，$k = 1, 2, \cdots, n$。

故 $\sum_{k=1}^{n} |PA_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{k-1}{n}\pi i}(A_k - P)\right|$

$= \left|\sum_{k=1}^{n}\left[P \cdot \exp\left(-\frac{(k-1)\pi}{n}i\right) - \exp\left(\frac{(k+1)\pi}{n}i\right)\right]\right|$

$= \left|\frac{2P}{1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}} - \frac{2e^{\frac{\pi}{n}i}}{1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right| = 2 \cdot \left|\frac{P - \varepsilon^{\frac{1}{2}}}{1-\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right| = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}}$

因为 $\left|\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2n}\right| \leqslant \frac{\pi}{2n}$，所以，当 P 为 $\overset{\frown}{A_1A_n}$ 的中点时，$\sum_{k=1}^{n} |PA_k|$ 最大，最大值为 $2\csc\frac{\pi}{2n}$；当 P 为 A_1 或 A_n 时，$\sum_{k=1}^{n} |PA_k|$ 最小，最小值为 $2\cot\frac{\pi}{2n}$

(2) 若 P 不限制在圆上，则有

$\sum_{k=1}^{n} |PA_k| = \sum_{k=1}^{n} |A_k - P| = \sum_{k=1}^{n} |A_k^{-1}(A_k - P)| \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} A_k^{-1}(A_k - P)\right| = \left|n - P \cdot \sum_{k=1}^{n} \bar{A}_k\right| = n$

故当 $P = 0$ 时，$\sum_{k=1}^{n} |PA_k|$ 有最小值 n。

同步检测 6

1. 由题设知，多项式 $P_k(x)$、$P_{k-1}(x)$ 满足 $P_k(x)=(P_{k-1}(x)-2)^2$，$P_k(0)=4$。
令 $P_k(x)=\cdots+A_kx^2+B_kx+4$，则经计算 $P_{k-1}(x)-2$ 的平方后整理得

$$P_k(x)=\cdots+(B_{k-1}^2+4A_{k-1})x^2+4B_{k-1}x+4$$

所以 $B_k=4B_{k-1}$，$A_k=B_{k-1}^2+4A_{k-1}$，$B_1=-4$，$A_1=1$。
由上面递推关系推得 $B_k=-4^k$，$A_k=\frac{1}{3}(4^{2k-1}-4^{k-1})$。

2. $x^8+4x^2+4=x^8+4x^6+4+(4x^4+8x^2+4x^4)-(4x^6+8x^4+4x^2)$
$=(x^4+2x^2+2)^2-[2x(x^2+1)]^2$
$=(x^4+2x^3+2x^2+2x+2)(x^4-2x^3+2x^2-2x+2)$

3. $P(5y^2)=5^5y^{10}+\cdots$ [illegible]
令 $P(5y^2)=(25y^4+ay^3+by^2+cy+d)(25y^4-ay^3+by^2-cy+1)$，
比较同次幂的系数可得一组解 $a=25$，$b=15$，$c=5$。
从而 $Q(y)=25y^4+25y^3+15y^2+5y+1$，$R(y)=25y^4-25y^3+15y^2-5y+1$ 满足题设要求。

4. 令 $f(x)=(x-m_1)(x-m_2)\cdots(x-m_n)-1$，则 $f(x)$ 满足条件(1)，下证 $f(x)$ 满足条件(2)。
事实上，若 $f(x)$ 不满足条件(2)，则存在次数不小于 1 的整系数多项式 $Q(x)$、$R(x)$，使得 $f(x)=Q(x)R(x)$。
因为对于 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，有 $f(m_i)=-1$，
所以 $Q(m_i)R(m_i)=-1$，
所以 $\begin{cases}Q(m_i)=1\\R(m_i)=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}Q(m_i)=-1,\\R(m_i)=1\end{cases}$
从而 $Q(m_i)+R(m_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$。
因为 $Q(x)$、$R(x)$ 的次数不超过 $n-1$，所以 $Q(x)+R(x)\equiv 0$，
即 $Q(x)=-R(x)$，所以 $f(x)=Q(x)R(x)=-[Q(x)]^2$
这与 $f(x)$ 的首项系数为 1 相矛盾，故结论成立。

5. 设 $f(x)$ 的最高次项为 a_nx^n ($a_n\neq 0$)，那么 $8f(x^3)$、$x^6f(2x)$、$2f(x)$ 的最高次项分别为 $8a_nx^{3n}$，$2^na_nx^{n+6}$，$2a_nx^n$。因为 $3n>n$，由①式和多项式恒等定理得 $\begin{cases}3n=n+6\\8a_n-2^na_n=0\end{cases}$
解得 $n=3$。于是设 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，在①式中令 $x=0$，得 $8a_0-2a_0+12=0$，
所以 $a_0=-2$，把 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x-2$ 代入①式并整理得

$$4a_2x^8-2a_1x^7+(8a_2+2-2a_3)x^6-2a_2x^5+8a_1x^3-2a_1x=0$$

由多项式恒等定理，得 $\begin{cases}4a_2=0,\\-2a_1=0,\\8a_3+2-2a_3=0.\end{cases}$
解得 $a_3=1$，$a_2=a_1=0$。因此，所求的多项式为 $f(x)=x^3-2$。

6. 若有某个 $P_i(x)\equiv 0$，则结论显然成立



若 r 个多项式均不为零多项式，则 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 中必有两个数是相等的(否则，不妨设 $0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_r$，则有 $n_i\geqslant i-1$，$\sum_{i=1}^{r}n_i\geqslant\frac{1}{2}r(r-1)$，这与题设条件矛盾). 不妨设 $n_i=n_j$，多项式 $P_i(x)$、$P_j(x)$ 的最高次数项系数分别是 a、b，作差：$g(x)=P_i(x)-\frac{a}{b}P_j(x)$，则 $\deg g(x)<\deg P_i(x)$. 这样一来，问题转化为证明存在不全为零的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，使 $\beta_1P_1(x)+\beta_2P_2(x)+\cdots+\beta_{i-1}P_{i-1}(x)+\beta_i g(x)+\beta_{i+1}P_{i+1}(x)+\cdots+\beta_rP_r(x)\equiv0$.

这里多项式 $P_1(x),P_2(x),\cdots,P_{i-1}(x),g(x),P_{i+1}(x),\cdots,P_r(x)$ 的次数和小于原来多项式 $P_1(x),P_2(x),\cdots,P_r(x)$ 的次数和.

继续上述步骤，直到其中某个多项式恒等于零(这是因为每进行一次这样的变化，一定有一个多项式被一个次数至少低一次的多项式代替). 证毕.

7. $2^{-2m}C_{2m}^{m}$ 是多项式 $\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2m}$ 展开式中 x^m 的系数. 因此，S_n 是 $\sum\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2m}$ 的展开式中 x^n 的系数. 令 $f_n(x)=\sum_{m=0}^{2n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{m}$，$S_n$ 也是 $f_n(x)$ 中 x^n 的系数(因为 $m<n$ 的项中 x 的幂指数小于 n).

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{2n}\left(\frac{1+x}{2}\right)^m=\frac{1-\left(\frac{1+x}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1+x}{2}}=\frac{2}{1-x}-\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(1+x)^{2n+1}}{1-x}=P-Q.$$

这里，$P=\frac{2}{1-x}$，$Q=\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(1+x)^{2n+1}}{1-x}$.

在 P 的展开式中，x^n 的系数是 2. 下面来求 Q 的展开式中 x^n 的系数.

$$Q=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}x^k\cdot\sum_{m}x^m.$$

因此，x^n 的系数为 $\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{k}=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}=\frac{1}{2^{2n+1}}(1+1)^{2n+1}=1$.

所以，$S_n=2-1=1$.

8. $(1+x)^{2n+1}=(1+x)^{2n}(1+x)=[2x+(1+x^2)]^n(1+x)$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot2^k\cdot x^k(1+x^2)^{n-k}(1+x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kx^k(1+x^2)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kx^{k+1}(1+x^2)^{n-k}.\qquad(*)$$

当 $n-k$ 为偶数时，$C_n^k2^kx^k(1+x^2)^{n-k}$ 中含 x^n 的项为

$$C_n^k2^kx^kC_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}\cdot(x^2)^{\frac{n-k}{2}}=C_n^k\cdot2^kC_{n-k}^{\frac{n-k}{2}}\cdot x^n,$$

而 $C_n^k2^kx^{k+1}(1+x^2)^{n-k}$ 中没有含 x^n 的项.

当 $n-k$ 为奇数时，$C_n^k\cdot2^kx^k(1+x^2)^{n-k}$ 中没有含 x^n 的项，而 $C_n^k2^kx^{k+1}(1+x^2)^{n-k}$ 中含 x^n 的项为 $C_n^k\cdot2^kx^{k+1}C_{n-k}^{\frac{n-k-1}{2}}\cdot(x^2)^{\frac{n-k-1}{2}}=C_n^k2^kC_{n-k}^{\frac{n-k-1}{2}}\cdot x^n$.

由上面讨论知，(*)式右端 x^n 的系数为 $\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^kC_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$



由多项式恒等定理得证.

9. 如果次数不大于3的多项式 $f(x)$ 满足：对所有的 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\geqslant 0$, 且 $f(x_0)=0$, 那么 $f(x)=a(x-x_0)^2$, 其中 $a\geqslant 0$. 因此 $R(x)\equiv P(x)+a(x-x_0)^2$, $Q(x)\equiv P(x)+b(x-x_0)^2$. 所以 $Q(x)\equiv\frac{a-b}{a}P(x)+\frac{b}{a}(P(x)+a(x-x_0)^2)\equiv kP(x)+(1-k)R(x)$, 其中 $a\geqslant b\geqslant 0$, $a\neq 0$, $k=1-\frac{b}{a}\in[0,1]$. 当 $a=0$ 时 $R(x)=Q(x)=P(x)$, 取 $k=1$ 即可. 对四次多项式, 相应的结论并不成立. 例如, 多项式 $P(x)=x^4$, $Q(x)=x^4+x^2$, $R(x)=2x^4+x^2$ 满足 $P(x)\leqslant Q(x)\leqslant R(x)$, 且 $P(0)=R(0)$, 但恒等式 $x^4+x^2\equiv kx^4+(1-k)(2x^4+x^2)$ 对所有的 $k\in[0,1]$ 都不成立. 事实上, 比较两边系数便得两个矛盾的等式 $1=k+2(1-k)$, $1=1-k$.

10. 对 $n\in\mathbf{N}$ 用数学归纳法证明更一般的结论：如果 n 次多项式满足, 当 $k=n+2, n+3, \cdots, 2n+2$ 时, $p(k)=a_k$, 则 $p(2n+3)=a_{2n+3}-1$.

当 $n=1$ 时, 有 $p(3)=2$, $p(4)=3$, 从而 $p(x)=x-1$, 且 $p(5)=4=a_5-1$.

现在设结论对 $n-1$ 成立, 下面证明它对 n 也成立. 设多项式 $p(x)$ 的次数为 n, 且当 $k=n+2, n+3, \cdots, 2n+2$ 时, 有 $p(k)=a_k$. 考虑多项式 $Q(x)=p(x+2)-p(x+1)$.

显然它的次数不大于 $n-1$. 因为当 $k=n+1, n+2, \cdots, 2n$ 时, $Q(k)=p(k+2)-p(k+1)=a_{k+2}-a_{k+1}=a_k$.

所以 $Q(x)$ 满足, 当 $k=n+1, n+2, \cdots, 2n$ 时, $Q(k)=a_k$. 由归纳假设, 有 $Q(2n+1)=a_{2n+1}-1$.

但是, $Q(2n+1)=p(2n+3)-p(2n+2)$.

因此 $p(2n+3)=p(2n+2)+Q(2n+1)=a_{2n+2}+a_{2n+1}-1=a_{2n+3}-1$.

由数学归纳法原理, 结论获证. 故 $p(1983)=a_{1983}-1$.

11. (i) 用反证法.

假设 $p\neq a_1$, 则 $p=|a_n|$, 并且 $p>a_1$, $a_n<0$.

设 $n-k+1\leqslant m\leqslant n$ 时 $a_m<a_1$, 而 $m\leqslant n-k$ 时 $a_m\geqslant a_1$, 这里 $1\leqslant k\leqslant n-1$.

则 $a_1^{2l+1}+a_2^{2l+1}+\cdots+a_n^{2l+1}=a_n^{2l+1}\left[\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1}+\cdots+\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}\right)^{2l+1}+k\right]$

由于 $\frac{a_1}{a_n}<1, \cdots, \frac{a_{n-k}}{a_n}<1$, 故存在 $l\in\mathbf{N}$ 使得 $\left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{2l+1}\leqslant\frac{1}{n}, \cdots, \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{2l+1}\leqslant\frac{1}{n}$.

所以 $\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1}+\cdots+\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}\right)^{2l+1}+k\geqslant k-\left|\frac{a_1}{a_n}\right|^{2l+1}-\cdots-\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{2l+1}$

$\geqslant k-\frac{n-k}{n}>0$.

于是 $a_1^{2l+1}+a_2^{2l+1}+\cdots+a_n^{2l+1}<0$, 与已知矛盾, 故只能 $p=a_1$.

(ii) 当 $x>a_1$ 时,

$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$

$\leqslant(x-a_1)\left[\frac{(x-a_2)+\cdots+(x-a_n)}{n-1}\right]^{n-1}$

$=(x-a_1)\left(x-\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}\leqslant(x-a_1)\left(x+\frac{a_1}{n-1}\right)^{n-1}$



$=(x-a_1)\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^{i}\left(\frac{a_1}{n-1}\right)^{i}x^{n-1-i}=(x-a_1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{C_{n-1}^{i}}{(n-1)^{i}}a_1^{i}x^{n-1-i}$

由于 $1\leqslant i\leqslant n-1$ 时，

$C_{n-1}^{i}=\frac{(n-1)\cdots(n-i)}{i!}=\frac{n-1}{1}\cdots\frac{n-i}{i}\leqslant(n-1)^{i}$，

而 $i=0$ 时，$C_{n-1}^{0}=C_{n-1}^{n-1}=1=(n-1)^{0}=(n-1)^{i}$，

故 $0\leqslant i\leqslant n-1$ 时，$\frac{C_{n-1}^{i}}{(n-1)^{i}}\leqslant 1$

所以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\leqslant(x-a_1)\sum_{i=0}^{n-1}a_1^{i}x^{n-1-i}=x^{n}-a_1^{n}$

同步检测 7

1\. $f(x^{100})=(x^{100})^{99}+(x^{100})^{98}+\cdots+x^{100}+1$

$=[(x^{100})^{99}-1]+[(x^{100})^{98}-1]+\cdots+(x^{100}-1)+100$

$=(x^{100}-1)F(x)+100$

$=f(x)[(x-1)F(x)]+100$。

这里 $F(x)$ 为整系数多项式，所以 $f(x^{100})$ 除以 $f(x)$ 所得的余数是 100.

2\. 多项式 x^4+ax^2+bx+c 除以 $x-1$ 得商式 $P(x)=x^3+x^2+(a+1)x+(a+b+1)$ 及余式 $Q_1(x)=a+b+c+1$

由题设，知 $Q_1(x)=a+b+c+1=0$.　①

又 $P(x)$ 除以 $x-1$ 得商式 $P_1(x)=x^2+2x+(a+3)$ 及余式 $Q_2(x)=2a+b+4$

由题设，知 $Q_2(x)=2a+b+4=0$　②

再由 $P_1(x)$ 除以 $x-1$ 得商式 $P_2(x)=x+3$ 及余式 $Q_3(x)=a+6$

由题设，知 $Q_3(x)=a+6=0$，即 $a=-6$. 将 $a=-6$ 代入 ②，得 $b=8$

又将 $b=8$，$a=-6$ 代入 ①，得 $c=-3$. 故 $a=-6$，$b=8$，$c=-3$ 为所求

3\. 由 $p(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数为 a，故可设 $p(x)=(x-a)\cdot Q_1(x)+a$.　①

于是 $p(b)=(b-a)\cdot Q_1(b)+a=b$. 又注意到 $a\neq b$，所以 $Q_1(b)=1$，即有 $Q_1(x)=(x-b)\cdot Q_2(x)+1$，将上式代入 ①，得 $p(x)=(x-a)(x-b)\cdot Q_2(x)+x$.　②

又由条件(3)，有 $p(c)=(c-a)(c-b)\cdot Q_2(c)+c=c$，

得 $Q_2(c)=0$，即 $Q_2(x)=(x-c)\cdot Q_3(x)$

又将上式代入 ②，得 $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdot Q_3(x)+x$

因此，$p(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 所得余式为 x

4\. 因为 $(x^2-1)g(x)=x^{2(n+1)}-1$，故 $g(x)=\frac{x^{2(n+1)}-1}{x^2-1}$.

又由 $(x^4-1)f(x)=x^{4(n+1)}-1$，故 $f(x)=\frac{x^{4(n+1)}-1}{x^4-1}$

于是 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{4(n+1)}-1}{x^4-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^{2(n+1)}-1}=\frac{x^{2(n+1)}+1}{x^2+1}$



可见，$g(x)\mid f(x)$ 当且仅当 $x^2+1\mid x^{2(n+1)}+1$，然而 $x^2+1\mid x^{2(n+1)}+1$ 当且仅当 $(i^2)^{n+1}+1=0$，即 $(-1)^{n+1}+1=0$. 亦即 n 为偶数.

5. 由 $g(x)=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2(2n-1)}=\frac{x^{4n}-1}{x^2-1}$，

$f(x)=1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots+x^{4(n-1)}=\frac{x^{4n}-1}{x^4-1}$，

得 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{4n}-1}{x^4-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^{4n}-1}=\frac{1}{x^2+1}$

但是 $x^2+1\nmid x^{4n}+1$；因若不然，设 $x^2+1\mid x^{4n}+1$，且 $x^{4n}+1=(x^2+1)q(x)$.

令 $x=i$，则得 $i^{4n}+1=(i^2+1)q(i)$，

出现 $2=0$，矛盾. 故 $x^2+1\nmid x^{4n}+1$. 从而 $g(x)\nmid f(x)$.

6. 由带余除法，得 $f(x)=q(x)g(x)+r_1(x)$，$r_1(x)=4x^3-4$.

再由带余除法，得 $g(x)=q_1(x)\cdot\frac{1}{4}r_1(x)+r_2(x)$，$r_2(x)=x^2+x+1$.

因为 $r_2(x)\mid\frac{1}{4}r_1(x)$，所以 $(\frac{1}{4}r_1(x),r_2(x))=r_2(x)$.

从而 $(g(x),r_1(x))=(\frac{1}{4}r_1(x),r_2(x))=r_2(x)$.

故 $(f(x),g(x))=r_2(x)=x^2+x+1$.

7. 因为 $(x-1)\mid p(x)$ 等价于 $P(1)=0$，所以只需证明 $x=1$ 为 $P(x)$ 的零点.

令 $w=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，则 $w^5=1$，且 w,w^2,w^3,w^4 为 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的四个根，于是 w,w^2,w^3 为 $P(1)+xQ(1)+x^2R(1)=0$ 的三个不同的根.

从而 $R(1)=Q(1)=P(1)=0$，故 $x=1$ 是 $P(x)$ 的零点.

8. 若 $a_1=a_2=0$，则由条件① 可知 $a_3=0$，此时结论显然成立.

若 a_1,a_2 中有一个不为 0，不妨设 $a_1\neq0$，这时，进一步不妨设 $a_1=1$，$b_1=0$(否则，作代换 $y=a_1x+b_1$ 进行讨论). 这时，$x^n+(a_2x+b_2)^n=(a_3x+b_3)^n$. 只需证明 $b_2=b_3=0$. 比较上式两边 x^n 项的系数，可知 $1+a_2^n=a_3^n$，故 $a_2\neq a_3$. 于是，利用因式分解，可知 $[(a_3x+b_3)-(a_2x+b_2)]\mid x^n$，从而 $b_2=b_3$，这导致 $x^n+(a_2x+b_2)^n=(a_3x+b_2)^n$.

比较两边 x 项的系数，得 $na_2b_2^{n-1}=na_3b_2^{n-1}$，结合 $a_2\neq a_3$，可知 $b_2=0$. 从而 $b_2=b_3=0$.

9. 充分性是显然的.

必要性的证明：设 $f(a)=a_1$，$f(a_1)=a_2$，…，$f(a_{1998})=a_{1999}$，则 $a_i\in\mathbf{Z}$，$i=1,2,\cdots,1999$，且 $f(a_{1999})=a$. 因为 $f(a)-f(a_1)=a_1-a_2$，$f(a_1)-f(a_2)=a_2-a_3$，…，$f(a_{1999})-f(a_{1998})=a_{1999}-a$.

另外，容易看出：若 $a,a_1,a_2,\cdots,a_{1999}$ 中有两个数相等，则它们必全相等. 即 $a=a_1=a_2=\cdots=a_{1999}$. 若它们两两互不相等. 由于对任意 $x,y\in\mathbf{Z}$，$f(x)\in\mathbf{Z}[x]$，有 $(x-y)\mid(f(x)-f(y))$，

即有 $(a-a_1)\mid(a_1-a_2)$，$(a_1-a_2)\mid(a_2-a_3)$，…，$(a_{1998}-a_{1999})\mid(a_{1999}-a)$.

从而 $|a-a_1|\leqslant|a_1-a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_{1998}-a_{1999}|\leqslant|a_{1999}-a|$，

于是 $|a-a_1|=|a_1-a_2|=\cdots=|a_{1998}-a_{1999}|=|a-a_{1999}|$.



故有 $a = a = a_2 = \quad = a_{1995}$，$f(a) = a$.

10．首先假定每 多项式 $p(x)$ 1和 $p(x)+1$ 有不少于 个不同的整根，且它们都是彼此相异的，在这六个整数中，取其中最小的 个记为 λ 不失 般性，不妨设 λ 是多项式 $p(x)+1$ 的根，于是由因式定理可得 $p(x)+1=(x \quad \lambda)Q(x)$，其中 $Q(x)$ 也是 个整系数多项式.

设 a, b, c 为多项式 $p(x)-1$ 的 个不同的整根 由于已取定了 λ，故 $a \quad b, c$ 都大于 λ，因为 $p(x)$ $1=(x \quad \lambda)Q(x \quad$ 2，故由余数定理知 $2=(a \quad \lambda)Q(a)=(b \quad \lambda)Q(b)= \quad \lambda)Q($ ，

其中 $a \quad \lambda, b \quad \lambda, c \quad \lambda$ 为三个不同的正整数 但此时，在这 个数中总有 个数要大于2，显然，这个大于2的整数不可能是2的整因子 这样，由此矛盾说明前面的假定是错误的 换言之，方程 $p(x)=1$ 和 $p(x)=$ ，中至少有 个方程其整根的个数不大于2，又因为这两个方程中，每 方程的整根个数不能超过 $\deg p(x)$，所以 $n(p) \leqslant \deg p(x)+2$，即 $n(p) \quad \deg p(x) \leqslant 2$

11．设7个连续自然数为 $a, a+1, a+2, \cdots, a+6$ 由条件(2)知，可构作多项式 $p(x)=x+(x-a)(x-a-6)(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ ①

其中 $b_1, b_2, b_3 \in \{a+1, a+2, \cdots, a+5\}$.

由条件(3)知 满足 $p(k)=0$ 的 $k \in \{a+1, \quad, a+5\}$

若 $k=a+1$，则由①，知 $a+1+1\cdot(-5)\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3=0$，

其中 c_1, c_2, c_3 为 $-1, -2, -3, -4$ 中的三个

令 $c_1=-1, c_2=-2, c_3=-3$，

则由 $a+1+1\cdot(-5)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)=0$，得 $a<0$，矛盾

同理 $\{c_1, c_2, c_3\} \subseteq \{-1, -2, -3, -4\}$ 时，都有 $a<0$，矛盾

若 $k=a+2$，则由①，知 $a+2+2\cdot(-4)\cdot c_1\cdot c_2\cdot c_3=0$，

其中 $\{c_1, c_2, c_3\} \subseteq \{1, -1, -2, -3\}$ 取 $c_1=1, c_2=-1, c_3=-2$，则由

$a+2+2\cdot(-4)\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)=0$，得 $a=14$，

于是7个数为14，15，16，17，18，19，20

故 $p(x)=x+(x-14)(x-20)(x-15)(x-17)(x-18)$

满足 $p(16)=16+2\cdot(-4)\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)=0$

$p(14)=14, p(20)=20, p(15)=15, p(17)=17, p(18)=18$.

同步检测8

1．若 $\deg P = $ ，令 $P(x)=a$，代入所给方程，得 $a \quad a^m$ 因 $m>1$，所以 $a=0$ 或 $a^{m} \quad =1$ 故 $a=0$ 或 $a=e^{\frac{2k\pi i}{m-1}}$，$k=0, 1, \cdots, m-2$

若 $\deg P>0$ 任取 复数 a，由代数基本定理 方程 $P(x)=a$ 必有根 β 即 $P(\beta)=a$ 而由题设，有 $P[P(\beta)]=P^m(\beta)$，即 $P(a)=a^m$ 由 a 的任意性及多项式恒等定理，得 $P(x)=x^m$

2．由于 $Q(x)$ 至少有6个不同的整数根 设 $a_1, a_2, \cdots, a_6$ 是它的6个不同的整数根，则 $Q(x)$ 可表示为 $Q(x)=(x \quad a_1)(x \quad a_2) \quad (x \quad a_6)Q_1(x)$，其中 $Q_1(x)$ 为整系数多项式 于是 $P(x)=(x \quad a_1)(x \quad a_2) \quad (x \quad a_6)Q_1(x) \quad 12$

若 $P(x)$ 有整数根，设为 r，则 $P(r)=0$，即 $12=(r \quad a_1)(r \quad a_2)\cdots(r \quad a_6)Q_1(r)$



由于 $Q(r)$ 为整数($\neq 0$),且 $r-a_1, r-a_2, \cdots, r-a_7$ 互不相等,其中同一绝对值者至多两个,所以 $12 \geqslant |r-a_1||r-a_2|\cdots|r-a_7| \geqslant 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2=36$.

矛盾.从而 $P(x)$ 没有整数根.

3. 将 $x=0, 1, \cdots, 97$ 分别代入 $xf(x-1)=(x-98)f(x)$,知 $x=0, 1, \cdots, 97$ 都是 $f(x)$ 的根.设 $f(x)=x(x-1)\cdots(x-97)g(x)$,则有

$$x(x-1)\cdots(x-98)g(x-1)\equiv(x-98)x(x-1)\cdots(x-97)g(x),$$

即 $g(x)\equiv g(x-1)$.

下面证明 $g(x)\equiv a$(常数).否则,设 $\deg g=n>0$,则它有 n 个复数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.于是,有 $g(x_i-1)=g(x_i)=0$, $1\leqslant i\leqslant n$,从而 $x_1-1, x_2-1, \cdots, x_n-1$ 也是 $g(x)$ 的 n 个根.但 $\sum_{i=1}^{n}x_i\neq\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)$,这与韦达定理矛盾.

因此 $f(x)=ax(x-1)\cdots(x-97)$,其中 a 为常数.

4. 因为 $f(0)=1$,所以 $f(x)$ 的根不为零,令 $y=\frac{1}{x}$,则 $g(y)=y^{2007}+y^{2006}+2y^{2005}+\cdots+a_{2006}y+a_{2007}$.设 $y_1, y_2, \cdots, y_{2007}$ 是 $g(y)$ 的根,则由韦达定理得 $\sum_{i=1}^{2007}y_i^2=\left(\sum_{i=1}^{2007}y_i\right)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2007}y_iy_j=-3$.

于是必有某个 y_i 为虚数,从而 $x_i=\frac{1}{y_i}$ 为虚数.

5. 由观察易知 $x=1$ 为原三次方程的一个自然数根.由综合除法,原三次方程可降次为二次方程

$5x^2-5px+66p-1=0$. (*)

原三次方程的三个根均为自然数 $\Leftrightarrow$ 二次方程(*)的两个根均为自然数.设 u, $v(u\leqslant v)$ 为方程(*)的两个根,则由韦达定理得

$$\begin{cases}u+v=p, & ①\\ uv=\frac{1}{5}(66p-1). & ②\end{cases}$$

把①代入②得 $5uv=66(u+v)-1$. ③

可知 u, v 都不能被 2, 3, 11 所整除.

又由③得 $v=\frac{66u-1}{5u-66}$. ④

而 u, v 均为自然数,由④可知 $u>\frac{66}{5}$,即 $u\geqslant 14$.

又 $2\nmid u$ 且 $3\nmid u$,知 $u\geqslant 17$.

由 $v\geqslant u$ 及④可得 $\frac{66u-1}{5u-66}\geqslant u$,即 $5u^2-132u+1\leqslant 0$.

于是,$u\leqslant\frac{66+\sqrt{66^2-5}}{5}<\frac{132}{5}$,故 $17\leqslant u\leqslant 26$.

再由 $2\nmid u$ 且 $3\nmid u$ 知,u 只能取 17, 19, 23, 25.



当 $u=17$ 时，由④得 $v=\frac{1121}{19}=59$.

当 $u=19$ 时，由④得 v 并非自然数，应舍去

当 $u=23$ 时，由④得 v 并非自然数，应舍去

当 $u=25$ 时，由④得 v 并非自然数，应舍去

所以，仅当 $p=u+v=76$ 时，方程（*）的两根均为自然数，原方程的三根均为自然数

6. 令 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，则 $r_1+r_2+r_3=-\frac{a_2}{a_3}$，$r_1r_2r_3=-\frac{a_0}{a_3}$，以及 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a_3}{8}+\frac{a_2}{4}+\frac{a_1}{2}+a_0$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a_3}{8}+\frac{a_2}{4}-\frac{a_1}{2}+a_0$.

$$\text{于是 } 1003=\frac{\frac{a_2}{2}+2a_0}{a_0}=\frac{a_2}{2a_0}+2.$$

$$\text{从而 } \frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}=\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}=\frac{a_2}{a_0}=2(1003-2)=2002$$

7. 设方程 $f(x)=0$ 的 n 个根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由 $a_0\neq 0$ 知，$x_k\neq 0(1\leqslant k\leqslant n)$，故方程 $g(x)=0$ 变形为

$$g(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)+\lambda a_n(1-x\overline{x_1})(1-x\overline{x_2})\cdots(1-x\overline{x_n})=0.$$

由于 $|\lambda|=1$，故

$$|x-x_1|\,|x-x_2|\cdots|x-x_n|=|1-x\overline{x_1}|\,|1-x\overline{x_2}|\cdots|1-x\overline{x_n}| \quad (*)$$

注意到 $|x-x_k|^2-|1-x\overline{x_k}|^2=(|x|^2-1)(1-|x_k|^2)$，且 $|x_k|^2<1(1\leqslant k\leqslant n)$，所以当 $|x|>1$（或 $|x|<1$）时，$|x-x_k|>|1-x\overline{x_k}|$（或 $|x-x_k|<|1-x\overline{x_k}|$）因此，（*）式成立，当且仅当 $|x|=1$，即方程 $g(x)=0$ 所有根的模都等于 1.

8. (1) 当 $x>0$ 时，$x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0\Leftrightarrow\frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{a_1}{x}=1$

记 $f(y)=a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_1y$.

由于 $y\geqslant 0$ 时，$f(y)$ 连续且严格单调上升，又 $f(0)=0$，$f(a_1^{-1})\geqslant 1$（不妨设 $a_1>0$），故存在唯一的正数 y_0，使 $f(y_0)=1$. 于是，方程 $x^n-a_1x^{n-1}-\cdots-a_{n-1}x-a_n=0$ 恰有一个正实根

(2) 由于 $g(y)=\ln y$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且上凸，故由琴生不等式，对于任意非负实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$（不都为零）和任意正数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，有

$$\ln\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\geqslant\frac{\lambda_1\ln y_1+\lambda_2\ln y_2+\cdots+\lambda_n\ln y_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

$$\text{即}\quad \frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}\geqslant(y_1^{\lambda_1}y_2^{\lambda_2}\cdots y_n^{\lambda_n})^{\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}}$$

取 $\lambda_k=a_k$，$y_k=y_0^k$，$1\leqslant k\leqslant n$，则 $\frac{a_1y_0+a_2y_0^2+\cdots+a_ny_0^n}{A}\geqslant(y_0^B)^{\frac{1}{A}}$

由 $a_1y_0+a_2y_0^2+\cdots+a_ny_0^n=1$ 有 $\frac{1}{A}\geqslant y_0^{\frac{B}{A}}$，即 $\left(\frac{1}{y_0}\right)^B\geqslant A^A$ 而 $R=\frac{1}{y_0}$，故 $A^A\leqslant R^B$



9. 由条件，可设 $P(x) = a_n(x+\beta_1)(x+\beta_2)\cdots(x+\beta_n)$，
这里 $\beta_i \geqslant 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$，且 $a_n \neq 0$。利用 $a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n-1}$ 可知

$$a_n^2\left(\prod_{i=1}^{n}\beta_i\right)^2 + a_n\left(\prod_{i=1}^{n}\beta_i\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i} = a_n^2 + \left(\prod_{i=1}^{n}\beta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right)a_n,$$

于是 $$\prod_{i=1}^{n}\beta_i - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\beta_i} = \sum_{i=1}^{n}\beta_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}. \qquad ①$$

下面对 n 运用数学归纳法证明，当 $\beta_i \geqslant 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 时，均有

$$\prod_{i=1}^{n}\beta_i - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\beta_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\beta_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i},$$

等号当且仅当 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 中有 $n-1$ 个数等于 1 时成立。

当 $n = 2$ 时，若 $\beta_1, \beta_2 \geqslant 1$，则有如下等价关系成立：

$$\beta_1\beta_2 - \frac{1}{\beta_1\beta_2} \geqslant (\beta_1+\beta_2) - \left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (\beta_1\beta_2)^2 - 1 \geqslant (\beta_1+\beta_2)(\beta_1\beta_2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow (\beta_1\beta_2 - 1)(\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) \geqslant 0.$$

所以，当 $n = 2$ 时，上述命题成立。

假设命题当 $n = k$ 时成立，则当 $n = k+1$ 时，令 $\alpha = \beta_k\beta_{k+1}$，由归纳假设，可知

$$\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i - \frac{1}{\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\beta_i}\right) + \alpha - \frac{1}{\alpha},$$

等号当且仅当 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{k-1}, \alpha$ 中有 $k-1$ 个等于 1 时成立。

又由 $n = 2$ 的情形，可知

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = \beta_k\beta_{k+1} - \frac{1}{\beta_k\beta_{k+1}} \geqslant \beta_k + \beta_{k+1} - \frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\beta_{k+1}},$$

于是 $$\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i - \frac{1}{\prod_{i=1}^{k+1}\beta_i} \geqslant \sum_{i=1}^{k+1}\beta_i - \sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{\beta_i},$$

等号当且仅当 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{k-1}, \alpha$ 中有 $k-1$ 个为 1，并且 β_k 与 β_{k+1} 中有一个为 1 时成立，而这等价于 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{k+1}$ 中有 k 个为 1 时成立。

由上述结论及 ① 式可知，形如 $P(x) = a_n(x+1)^{n-1}(x+\beta)$，$a_n \neq 0$，$\beta \geqslant 1$ 的多项式为所有满足条件的多项式。

10. 假定 $f \in F$ 使得 $f(x) = m(k)$ 恰有 k 个互不相同的整数根，设这些整数根依次为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$，则存在整系数多项式 $g(x)$，使得

$$f(x) - m(k) = (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_k)g(x).$$

又由 $f \in F$ 知存在整数 α，使得 $f(\alpha) = 1$。

将 a 代入上述分解式并在等式两端取绝对值得

$$m(k)-1=|a-\beta_1|\cdot|a-\beta_2|\cdots|a-\beta_k|\cdot|g(a)|.$$

依题设，$a-\beta_1, a-\beta_2, \cdots, a-\beta_k$ 是互不相同的整数，又 $m(k)>1$，所以它们均非零．为保证 $m(k)$ 确为最小，显然应有 $|g(a)|=1$，而 $a-\beta_1, a-\beta_2, \cdots, a-\beta_k$ 取绝对值最小的 k 个非零整数，亦即从 $\pm1, \pm2, \cdots$ 中顺次选取．

下面对 k 分情况讨论求出 $m(k)$ 的具体值．

当 k 是偶数时，$a-\beta_1, a-\beta_2, \cdots, a-\beta_k$ 应取 $\pm1, \pm2, \cdots, \pm\frac{k}{2}$，其中有 $\frac{k}{2}$ 个负数，考虑最初的分解式可知 $g(a)$ 必等于 $(-1)^{\frac{k}{2}}$．从而，$m(k)=\left(\left(\frac{k}{2}\right)!\right)^2+1$．

相应的 f 可取 $f(x)=(-1)^{\frac{k}{2}+1}\prod\limits_{i=1}^{\frac{k}{2}}(x^2-i^2)+\left(\left(\frac{k}{2}\right)!\right)^2+1$．

类似地，当 k 为奇数时，$a-\beta_1, a-\beta_2, \cdots, a-\beta_k$ 应取 $\pm1, \pm2, \cdots, \pm\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}$，$g(a)$ 等于 $(-1)^{\frac{k-1}{2}+1}$．从而，$m(k)=\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k+1}{2}\right)!+1$．

相应的 f 可取 $f(x)=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\prod\limits_{i=1}^{\frac{k-1}{2}}(x^2-i^2)\left(x+\frac{k+1}{2}\right)+\left(\frac{k-1}{2}\right)!\left(\frac{k+1}{2}\right)!+1$．

同步检测9

1．利用拉格朗日插值公式，有

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}f(0)+\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}f(1)\\&\quad+\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}f(2)+\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}f(3)\\&=-\frac{1}{3}(x^3-9x^2+8x-3).\end{aligned}$$

2．由 $g(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$，知 $x_1=0, x_2=1, x_3=-1$，此时，$f(0)=0, f(1)=5, f(-1)=-5$．

设 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式为 $r(x)$，则 $\deg r<3$．由拉格朗日插值公式，得

$$\begin{aligned}r(x)&=\frac{(x-1)(x+1)}{(0-1)(0+1)}f(0)+\frac{(x-0)(x+1)}{(1-0)(1+1)}f(1)+\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}f(-1)\\&=5x.\end{aligned}$$

3．设函数 $f(n)=\frac{1}{\sin2x}+\frac{1}{\sin4x}+\cdots+\frac{1}{\sin2^nx}-\cot x+\cot2^nx$，则

$$\Delta f(n-1)=f(n)-f(n-1)=\frac{1}{\sin2^nx}+\cot2^nx-\cot2^{n-1}x$$



$$\frac{1}{\sin 2^n x}-\frac{\sin(2^n x-2^{n-1}x)}{\sin 2^{n-1}x\cdot\sin 2^n x}=0=\Delta f(n)$$

又 $f(1)=\frac{1}{\sin 2x}-\cot x+\cot 2x=0$，故 $f(n)=f(1)=0$，即

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$$

4. 由于题目涉及到函数 $f(x)=a^x-p(x)$ 在 $n+2$ 个连续整数 $x=0,1,\cdots,n+1$ 的值，我们希望对 $f(x)$ 运用差分公式作估计来解决本题. 事实上，依定义有

$$\Delta a^x=a^{x+1}-a^x=(a-1)a^x,$$
$$\Delta^2 a^x=(a-1)\Delta a^x=(a-1)^2a^x,$$
$$\cdots$$
$$\Delta^{n+1}a^x=(a-1)^{n+1}a^x$$

故 $\Delta^{n+1}a^x|_{x=0}=(a-1)^{n+1}$，于是，由定理得

$$\Delta^{n+1}f(0)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^k[a^k-p(k)]$$

又 $\Delta^{n+1}f(0)=\Delta^{n+1}a^x|_{x=0}-\Delta^{n+1}p(0)=(a-1)^{n+1}$，故

$$(a-1)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}C_{n+1}^k[a^k-p(k)].$$

反设 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant n+1}\{|a^x-p(x)|\}<1$，即对一切 $x=0,1,\cdots,n+1$，$|a^x-p(x)|<1$，从而由 $a\geqslant 3$ 得

$2^{n+1}\leqslant(a-1)^{n+1}<\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k=2^{n+1}$，矛盾，故 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant n+1}|a^x-p(x)|\geqslant 1$.

5. 我们有 $\Delta^{3n+1}p(0)=\sum\limits_{k=0}^{3n+1}(-1)^kC_{3n+1}^k p(3n+1-k)$

$$=730+\sum_{j=0}^{n}(-1)^{3j+1}C_{3n+1}^{3j+1}\cdot 2+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{3j}C_{3n+1}^{3j}$$

$$=729-2\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j+1}+\sum_{j=0}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j}=0. \qquad (*)$$

为求 $M=\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j+1}$ 和 $N=\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j}$，利用三次单位根 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 以及多项式 $f(x)$

$=(1-x)^{3n+1}=\sum\limits_{k=0}^{3n+1}(-1)^kC_{3n+1}^k x^k$

$=\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j}\cdot x^{3j}-\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j+1}\cdot x^{3j+1}-\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j-1}\cdot x^{3j-1}$，

根据此展开式及 ω 之性质有

$$f(1)=N-M-L=0，其中 L=\sum_{j=1}^{n}(-1)^jC_{3n+1}^{3j-1}，$$
$$f(\omega)=N-M\omega-L\omega^2=(1-\omega)^{3n+1},$$
$$f(\omega^2)=N-M\omega^2-L\omega=(1-\omega^2)^{3n+1}$$



于是 $N=\frac{1}{3}[f(1)+f(\omega)+f(\omega^2)]=2(\sqrt{3})^{3n-1}\cdot\cos\frac{3n+1}{6}\pi$,

$$M=\frac{1}{3}[f(1)+\omega^2 f(\omega)+\omega f(\omega^2)]=2(\sqrt{3})^{3n-1}\cdot\cos\frac{3n-1}{6}\pi.$$

将其代入(*)式得 $729-4(\sqrt{3})^{3n}\cdot\cos\frac{3n-1}{6}\pi+2(\sqrt{3})^{3n-1}\cdot\cos\frac{3n+1}{6}\pi=0$. 当 $n=2t$ 时,求得 $t=2$,即 $n=4$;当 $n=2t+1$ 时,可知方程无整数解. 故 $n=4$ 为所求.

6. 由拉格朗日插值公式,有 $p(x)=\sum_{k=-n}^{n}f(k)\prod_{\substack{j\neq k\\ -n\leqslant j\leqslant n}}\frac{x-j}{k-j}$.

所以 $|p(x)|\leqslant\sum_{k=-n}^{n}|f(k)|\prod_{\substack{j\neq k\\ -n\leqslant j\leqslant n}}\left|\frac{x-j}{k-j}\right|\leqslant\sum_{k=-n}^{n}\frac{\prod_{\substack{j\neq k\\ -n\leqslant j\leqslant n}}|x-j|}{(n+k)!(n-k)!}$.

当 $x\in[-n,n]$ 时,有 $\prod_{\substack{j\neq k\\ -n\leqslant j\leqslant n}}|x-j|\leqslant(2n)!$. (*)

事实上,将 $|x-j|$ $(j\neq k,-n\leqslant j\leqslant n)$ 按从小到大的顺序排列,第 t 项小于等于 t. 故(*)式成立. 因此 $|p(x)|\leqslant\sum_{k=-n}^{n}\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}=\sum_{k=-n}^{n}C_{2n}^{n+k}=2^{2n}$.

7. 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 对应的复数为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,满足 $|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=1$. 对多项式 $f(z)=1$,由拉格朗日插值公式知,对任意复数 z,有

$$\frac{(z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_n)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)}+\frac{(z-z_1)(z-z_3)\cdots(z-z_n)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)}+\cdots$$
$$+\frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_{n-1})}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}=1.$$

在上式中,令 $z=0$,并两边取模,即得 $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n}\geqslant1$.

8. 由拉格朗日公式,有

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}\Big(\prod_{\substack{j\neq i\\ 0\leqslant j\leqslant n}}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\Big)\cdot p(x_i)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n. \quad (*)$$

假设题中结论不成立,即当 $i=0,1,2,\cdots,n$ 时,$|p(x_i)|<\frac{n!}{2^n}$,则多项式 $p(x)$ 的首项系数1应等于乘积 $\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ 的首项系数之和,且其模不超过

$$\sum_{i=0}^{n}|p(x_i)|\prod_{\substack{j\neq i\\ 0\leqslant j\leqslant n}}\frac{1}{|x_i-x_j|}<\frac{n!}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j\neq i\\ 0\leqslant j\leqslant n}}\frac{1}{|x_i-x_j|}$$
$$\leqslant\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{2^n}\cdot\frac{1}{\prod_{j<i}(i-j)}\cdot\frac{1}{\prod_{j>i}(j-i)}=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}C_n^i=1.$$

矛盾. 因此,原结论成立.

9. 设当 x 取 $n+1$ 个连续整数 $k_0,k_0+1,\cdots,k_0+n(k_0\in\mathbf{Z})$ 时,$f(k_0),f(k_0+1),\cdots,f(k_0+n)$



都是整数

又对于任一整数 k，取 $x_i = k + i\ (0 \leqslant i \leqslant n)$，则由拉格朗日插值恒等式知，$f$ 唯一表示为 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(k+i)\cdot\prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(x - x_j)$，其中

$$a_i = \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(x-x_j)(x_i - x_j)^{-1} = \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}(x-x_j)(i-j)^{-1} = \frac{(-1)^{n-i}}{n!}\cdot C_n^i$$

比较 x^n 的系数，得 $a_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}}{n!}\cdot C_n^i f(k+i)$

所以 $n!a_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f(k+i)$ 在上式中，令 $k=k_0$，则 $n!a_n$ 是整数

在递推式 $f(k+n) = n!a_n - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}C_n^i\cdot f(k+i)$ 中依次取 $k = k_0+1, k_0+2, \cdots, k_0+t, \cdots$ $(t\in \mathrm{N})$，则依次可递推出 $f(k_0+t)(t=1,2,\cdots)$ 都是整数

在递推式 $f(k) = (-1)^n n!a_n - \sum_{i=1}^{n}(-1)^i C_n^i f(k+i)$ 中依次取 $k=k_0-1, k_0-2, \cdots, k_0-t, \cdots$ $(t\in \mathrm{N})$，则依次可递推出 $f(k_0-t)(t=1,2,\cdots)$ 都是整数.

因 k_0+n+t 和 $k_0-t(t=1,2,\cdots)$ 合起来可取遍集合 $N-\{k_0,\cdots,k_0+n\}$，故 $f(x)$ 是整值多项式. 证毕

10. 先证明结论对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 成立

构造一个次数不高于 $n-1$ 次的多项式，使它在每个点 a_i 处取值为 a_i^k，$i=1,2,\cdots,n$. 由拉格朗日插值公式，这个多项式为 $P(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i^k\frac{\prod_{j\neq i}(x-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}\prod_{j\neq i}(x-a_j)$，其中 x^{n-1} 的系数是 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}$

另一方面，多项式 $P(x)=x^k$（由多项式恒等定理知），因此，当 $k<n-1$ 时，x^{n-1} 的系数为0，而当 $k=n-1$ 时，x^{n-1} 的系数为1. 这就说明当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{p_i}$ 都是整数.

对于 $k\geqslant n$，假设 $\frac{a_1^{k-1}}{p_1}+\frac{a_2^{k-1}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-1}}{p_n}=b_{k-1}$，

$$\frac{a_1^{k-2}}{p_1}+\frac{a_2^{k-2}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-2}}{p_n}=b_{k-2}$$

$$\frac{a_1^{k-n+1}}{p_1}+\frac{a_2^{k-n+1}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-n+1}}{p_n}=b_{k-n+1}$$

$$\frac{a_1^{k-n}}{p_1}+\frac{a_2^{k-n}}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^{k-n}}{p_n}=b_{k-n}$$

其中 $b_{k-1},b_{k-2},\cdots,b_{k-n}$ 都是整数. 设多项式 $x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n$ 的根为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，即 $x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，那么从上式易知 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 均为整数，且对每个 $j=1,2,\cdots,n$，有 $a_j^k = -\sum_{i=1}^{n}c_i a_j^{k-i}$ 从而



$$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i \frac{a_j^{k}}{p_j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k-m}}{p_j}\sum_{i=1}^{n} c_i a_j^{m} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k-m}}{p_j}a_j^{m} = \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{k}}{p_j}$$

所以 $\frac{a_1^k}{p_1}+\frac{a_2^k}{p_2}+\cdots+\frac{a_n^k}{p_n}=\sum_{i=1}^{n}c_i b_i$

也是整数，故由数学归纳法知命题正确.

同步检测 10

1．存在素数 $p=3$，由艾森斯坦因判别法知，$f(x)$ 在整数范围内不可约.

2．首先考虑 x^4+1．显然它没有一次因式，则若它在 $\mathbf{Z}$ 上可约，必然是两个二次因式之积，我们可设 $x^4+1=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$，这里 a,b,c,d 均为整数．比较系数得到 $a+c=0$，$ac+b+d=0$，$ad+bc=0$，$bd=1$．故 $b=d=\pm1$，进而 $a^2=\pm2$，这不可能．因此 x^4+1 在 $\mathbf{Z}[x]$ 上不可约.

根据同样的方法，可知 x^4+4 在 $\mathbf{Z}$ 上可约：$x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

3．因为 $bd+cd=(b+c)d$ 是奇数，所以 d 与 $b+c$ 均为奇数，进而 $f(1)=1+b+c+d$ 是奇数．假设 $f(x)=(x+p)(x^2+qx+r)$，$p,q,r\in\mathbf{Z}$ ①

比较两端的常数项，得 $pr=d$．因 d 是奇数，所以 p 是奇数，从而 $1+p$ 是偶数.

在①式中令 $x=1$，得 $f(1)=(1+p)(1+q+r)$ 是偶数，矛盾.

4．欲证 $f(x)$ 在有理数范围内不可约，只需证明 $p!f(x)$ 在有理数范围内不可约．由于 $p!f(x)=$
$p!+p!x+\frac{p!}{2!}x^2+\frac{p!}{3!}x^3+\cdots+\frac{p!}{(p-1)!}x^{p-1}+x^p$.

上式右边是一个整系数多项式．取素数 p，可以验证 $p!f(x)$ 满足艾森斯坦因判别法中的条件.

5．令 $x=y+1$，则 $f(y+1)=\frac{(y+1)^5-1}{(y+1)-1}=y^4+5y^3+10y^2+10y+5$.

取 $p=5$，由艾森斯坦因判别法知 $f(y+1)$ 不可约，从而 $f(x)$ 不可约.

6．若 $f(x)=0$ 的根 α 的模 $|\alpha|\leqslant|a_n|$，则 $p=\frac{1}{|a_n|}\left|\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|a_i||a_n|^{i-1}$，

这与题设条件矛盾．故 $|\alpha|>|a_n|$.

设 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x)$，$h(x)$ 是非常数的整系数多项式．由 $f(0)=g(0)h(0)$，得 $pa_n=bc$，其中 $g(0)=b$，$h(0)=c$．于是 $p|b$ 或 $p|c$．不妨设 $p|b$，即存在正整数 t，使得 $b=pt$．因而 $|a_n|=|c|t\geqslant|c|$.

又 $|c|=|h(0)|$ 不小于多项式 $h(x)$ 所有根的模的乘积，所以必有 $|c|>|a_n|$，这与 $|a_n|\geqslant|c|$ 矛盾.

7．设 $f(x)=x^5-x+k$．首先，$f(x)$ 没有一次因式．因为若 $f(x)$ 有整数根 α，则由 $\alpha^5-\alpha\equiv0\pmod 5$ 知 $5|k$，矛盾．假设 $f(x)$ 有二次因式 x^2-ax-b，易求出 $f(x)$ 被 x^2-ax-b 除得的余式是 $(a^4+3a^2b+b^2-1)x+(a^3b+2ab^2+k)$.

这必须是零多项式，故 $\begin{cases}a^4+3a^2b+b^2-1=0,\\ a^3b+2ab^2+k=0\end{cases}$

从而 $a(a^4+3a^2b+b^2-1)-3(a^3b+2ab^2+k)=0$，即 $a^5-a-5ab^2=3k$



上式左边是 5 的倍数，故 $5 \mid k$，矛盾.

8. 反证法. 假设有非常数的整系数多项式 $g(x)=b_0x^r+\cdots+b_r$ 及 $h(x)=c_0x^s+\cdots+c_s$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$.

比较系数可得 $a_{n-1}=b_{r-1}c_s+b_rc_{s-1}$，以及 $p^m=|a_n|=|b_r|\cdot|c_s|$. 因 $p\nmid a_{n-1}$，故 b_r，c_s 不能都被 p 整除. 不妨设 $p\nmid b_r$，则有 $|c_s|=p^m$ 及 $|b_r|=1$.

易知 $f(x)$ 的根的模都大于 1，故 $g(x)$ 的根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 的模都大于 1，结合韦达定理推出 $|b_r|=|b_0||\alpha_1|\cdots|\alpha_r|>|b_0|\geqslant 1$，这与前面的结果 $|b_r|=1$ 矛盾.

9. 设 $f(x)=g(x)h(x)$，其中 $g(x)$，$h(x)$ 为非常数整系数多项式. 那么，$kp=|f(b)|=|g(b)||h(b)|$. 于是质数 p 整除 $|g(b)|$，$|h(b)|$ 之一. 不妨设 $p\mid |h(b)|$，那么 $|g(b)|\leqslant k$. 设 $r_1,r_2,\cdots,r_j$ $(j\geqslant 1)$ 是 $g(x)$ 的根，b_0 为其首项系数，则 $g(x)=b_0(x-r_1)\cdots(x-r_j)$. 因 $|b-r_i|>\sqrt{k}$，$i=1,2,\cdots,j$（由题设条件(3)），所以，$k\geqslant|g(b)|=|b_0||b-r_1|\cdots|b-r_j|>k^{\frac{j}{2}}$. 于是 $j=1$，即 $g(x)=b_0x+b_1$. 设 $b_0>0$，若 $b_1<0$，则 $f(x)$ 有一个正实根，这不可能，所以 $b_1\geqslant 0$. 但此时 $b>k\geqslant|g(b)|=|b_0b+b_1|\geqslant b_0b\geqslant b$，矛盾.

10. 当 $n=1$ 时命题显然成立，考虑 $n\geqslant 2$ 的情形. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 中可约，即 $f(x)=g(x)h(x)$. 这里 $g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_rx^r$，$h(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_tx^t$.
其中 $r,t\geqslant 1$，a_i，$b_i\in\mathbf{Z}$. 注意到，对 $m\in\{\pm1,\pm2,\cdots,\pm n\}$，均有 $(mi)^2+m^2=0$，于是 $1=f(mi)=g(mi)h(mi)$. 但 g，$h\in\mathbf{Z}[x]$，所以，$g(mi)\in\{1,-1,i,-i\}$. 而

$$g(mi)=(a_0-a_2m^2+a_4m^4-\cdots)+m(a_1-a_3m^2+a_5m^4-\cdots)i$$

的虚部是 m 的倍数，从而在 $m\neq\pm1$ 时，$g(mi)$ 的虚部只能为 0，即 $g(mi)\in\{1,-1\}$. 进一步，此时由 $1=g(mi)h(mi)$，可知 $h(mi)=g(mi)=\pm1$. 所以，有

$$g(x)-h(x)=(x^2+2^2)(x^2+3^2)\cdots(x^2+n^2)k(x),$$

其中 $k(x)\in\mathbf{Z}[x]$. 显然 $k(x)$ 的次数不大于 1. 由于 $g(i)$，$h(i)\in\{\pm1,\pm i\}$，所以

$$2\geqslant|g(i)-h(i)|=(-1+2^2)(-1+3^2)\cdots(-1+n^2)|k(i)|.$$

这要求 $k(i)=0$，同理可证 $k(-i)=0$. 这表明 $k(x)=0$，从而 $g(x)=h(x)$，此时要求 $a_0^2=g(0)h(0)=(n!)^2+1$，这与 $a_0\in\mathbf{Z}$ 矛盾（注意 $n\geqslant 2$）. 所以，$f(x)$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约.

同步检测 11

1. 将所要计算的式子表示为 σ_1，σ_2，σ_3 的多项式. 对比：

指数组	相应单项式
(4, 2, 0)	$\sigma_1^2\sigma_2^2$
(4, 1, 1)	$\sigma_1^3\sigma_3$
(3, 3, 0)	σ_2^3
(3, 2, 1)	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
(2, 2, 2)	σ_3^2



可设 $I = (\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)(\sigma_2^2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2)(\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1^2)$

$$= \sigma_1^2\sigma_2^2 + A\sigma_1^3\sigma_3 + B\sigma_2^3 + C\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + D\sigma_3^2$$

其中 A、B、C、D 待定. 依次令 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1, -1, 0)$, $(1, -1, 1)$, $(2, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$, 可得

$$\begin{cases} B = -1, \\ C + D - A - B = 2, \\ -27B + 8D = 27, \\ 27A + 27B + 9C + D = -54. \end{cases}$$

于是有 $A = -1$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 0$. 故 $I = \sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^3\sigma_3 - \sigma_2^3 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

由韦达定理, $\sigma_1 = \frac{6}{5}$, $\sigma_2 = \frac{7}{5}$, $\sigma_3 = \frac{8}{5}$. 从而可算得, $I = \frac{764}{625}$.

2. 设 $s_n = x^n + y^n + z^n (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $s_1 = s_2 = s_5 = 3$. 设 x, y, z 是三次多项式 $f(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3$ 的三个根, 则由题设 $\sigma_1 = s_1 = 3$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) = 3$. 下面计算 σ_3. 由牛顿公式, 有

$$s_5 = 3s_4 - 3s_3 + \sigma_3 s_2,$$
$$s_4 = 3s_3 - 3s_2 + \sigma_3 s_1,$$
$$s_3 = 3s_2 - 2s_1 + 3\sigma_3.$$

由以上三式, 可得 $s_5 = 30\sigma_3 - 27$. 又 $s_5 = 3$, 则 $\sigma_3 = 1$. 从而 $f(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t - 1)^3$, 故 $x = y = z = 1$.

3. 由韦达定理, $a_i = (-1)^i\sigma_i$, 从而由题设得 $p^i \mid \sigma_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

下面用数学归纳法证明命题. 当 $k = 1$ 时, 有 $p \mid s_1$. 设对一切 $m < k$, 有 $p^m \mid s_m$, 则由 $p^{k-m} \mid \sigma_{k-m}$, 得 $p^k \mid \sigma_{k-m}s_m$, 从而由牛顿公式, 可得 $p^k \mid s_k$.

4. 设 $\mu = 1 + \sqrt{3}$, $\nu = 1 - \sqrt{3}$, 则 μ, ν 是一元二次方程 $x^2 = 2x + 2$ 的两根.

令 $T_n = \mu^n + \nu^n$, 则据牛顿公式, 有 $T_n = 2T_{n-1} + 2T_{n-2} (n \geqslant 2)$.

因为 $T_0 = 2$, $T_1 = \mu + \nu = 2$.

由递推关系易知 $T_n \in \mathbf{Z}$. 又 $0 < \sqrt{3} - 1 < 1$, $0 < (\sqrt{3} - 1)^{2n+1} < 1$, 于是由

$T_{2n+1} = (1 + \sqrt{3})^{2n+1} + (1 - \sqrt{3})^{2n+1} < (1 + \sqrt{3})^{2n+1}$ 可得 $T_{2n+1} = [(1 + \sqrt{3})^{2n+1}]$.

由 $T_{2n} = (1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n} = 2^n[(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n]$, 用上面的证法或用二项式定理可证 $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in \mathbf{Z}$, 于是 $2^n \mid T_{2n}$.

i) $n = 0$ 时, $T_1 = 2$, $2 \mid T_1$.

ii) 设 $n = k$ 时, $2^{k+1} \mid T_{2k+1}$.

当 $n = k + 1$ 时, 由 $T_{2(k+1)+1} = 2T_{2k+2} + 2T_{2k+1}$, 以及结论 $2^n \mid T_{2n}$ 和归纳假设 $2^{k+1} \mid T_{2k+1}$ 可得 $2^{k+2} \mid T_{2(k+1)+1}$.

故对一切非负整数 n, 有 $2^{n+1} \mid T_{2n+1}$, 从而本题得证.

5. 设 $a = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{1980}$ 及 $T_n = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2n} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{2n} = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$.

因 $5+2\sqrt{6}$，$5-2\sqrt{6}$ 是方程 $x^2=10x-1$ 的两根，据牛顿公式，有

$$T_{n+2}=10T_{n+1}-T_n(n=1,2,\cdots) \text{ 且 } T_1=10,\ T_2=98.$$

由递推关系式可知：T_n 为整数，T_{n+2} 与 T_n 的个位数字之和的个位数字为0，于是 T_{n+4} 与 T_n 的个位数相同，T_{990} 与 $T_{990-4\times247}=T_2=98$ 的个位数相同，即 T_{990} 的个位数为8。因为 $0<5-2\sqrt{6}<0.2$，所以 $0<(5-2\sqrt{6})^{990}<0.2^{990}<0.01^{330}$，故 $T_{990}=a+\underbrace{0.0\cdots0p}_{\text{至少660个0}}$

$$T_{990}=a<(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}.$$

因此 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$ 的个位数为7，第一位小数为9（且小数点后面至少连续有660个9）。

6. 依题设知 a，b，c 是方程 $x^3+(ab+bc+ca)x-abc=0$ 的三个根，令 $S_n=a^n+b^n+c^n(n=0,1,2,\cdots)$，则 $S_n=-(ab+bc+ca)S_{n-2}+abcS_{n-3}(n\geqslant3)$。

又 $S_0=3$，$S_1=0$，则 $S_3=-(ab+bc+ca)S_1+abcS_0=3abc$，而 $S_2=a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2(ab+bc+ca)$，从而 $S_n=\frac{1}{2}S_2S_{n-2}+\frac{1}{3}S_3S_{n-3}(n\geqslant3)$，故 $S_4=\frac{1}{2}S_2^2$，$S_5=\frac{1}{2}S_2S_3+\frac{1}{3}S_3S_2=\frac{5}{6}S_2S_3$，$S_7=\frac{1}{2}S_2S_5+\frac{1}{3}S_3S_4=\frac{7}{12}S_2^2S_3$。

从而 $S_2S_3S_4S_5=\frac{5}{12}S_2^4S_3^2$，$S_7^2=\frac{49}{144}S_2^4S_3^2$，故 $\frac{S_7^2}{S_2S_3S_4S_5}=\frac{49}{60}$。

7. 将 x_i 看作未定元素，则 $\sigma_1=S_1=S_3=0$，由 $k\geqslant n$ 时的牛顿公式 $S_2-\sigma_1S_1+2\sigma_2=0$，则 $S_2=-2\sigma_2$，由 $S_3-\sigma_1S_2+\sigma_2S_1-3\sigma_3=0$，有 $S_3=3\sigma_3$。

同理 $S_4=2\sigma_2^2-4\sigma_4$，$S_5=-5\sigma_2\sigma_3$，$S_7=7(\sigma_2^2-\sigma_4)\sigma_3$，由 $S_7=0$，得 $\sigma_3=0$ 或 $\sigma_4=\sigma_2^2$。

若 $\sigma_3=0$，则 $f(t)=(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)(t-x_4)=t^4+\sigma_2t^2+\sigma_4$。
由此可知，$f(x)$ 的4个根为两对相反的数，则 x_4 与 x_1，x_2，x_3 中之一为相反数，从而 $u=0$。

若 $\sigma_4=\sigma_2^2$，则 $S_4=-2\sigma_2^2\leqslant0$，导出 $S_4=0$，从而 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$，故 $u=0$。

8. 对三元函数 $f(p,q,r)$，用 $\sum f(p,q,r)$ 表示循环和：

$$f(p,q,r)+f(q,r,p)+f(r,p,q). \quad ①$$

为证明①成立，只需证明：$7(pq+qr+rp)(p+q+r)\leqslant2(p+q+r)^3+9pqr$。 ②

将②式两边展开，合并同类项，只需证明：

$$7\sum(p^2q+pq^2+q^2r)\leqslant9pqr+\sum(2p^3+6p^2q+6pq^2+4pqr).$$

即证 $\sum p^2q+\sum pq^2\leqslant\sum2p^3=\sum\frac{2p^3+q^3}{3}+\sum\frac{p^3+2q^3}{3}$。 ③

注意到 $\frac{1}{3}(2p^3+q^3)=\frac{1}{3}(p^3+p^3+q^3)\geqslant p^2q$（平均不等式）等。

可知不等式③成立，从而命题成立。

9. 我们希望用所谓"代入法"从②找出 $p(x,y)$ 的某些因式。比如令 $a=b=c=y$，得 $p(2y,y)=0$。此说明 $x=2y$ 时 $p(x,y)=0$，故 $p(x,y)$ 有因式 $x-2y$。又令 $a=b=y$，$c=-2y$ 得 $p(2y,-2y)$



$+2p(-y, y)=0$，由 ① 即 $(-2)^n p(-y, y)+2p(-y, y)=0$，所以 $n=1$ 或 $p(-y, y)=0$，若 $n=1$，则 $p(x, y)=k(x, -2y)$，并由 ③ 知 $k=1$. 若 $p(-y, y)=0$，则 $p(x, y)$ 有因式 $x+y$. 令 $p(x, y)=(x+y)p_1(x, y)$，代入 ②，可知 $p_1(x, y)$ 仍适合 ②. 若 $n\neq 1$，则又有 $p_1(x, y)=(x+y)p_2(x, y)\cdots$ 依此推之，最后可证 $p(x, y)=(x+y)^{n-1}(x-2y)$.

10. 记所有可能的 2^n 个数组 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ 的集合为 A_n，其中每个 ε_i 取值为 1 或 -1. 另外记 $x_\varepsilon=\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\cdots+\varepsilon_n x_n$. 下面证明，对每个 $n\in\mathbf{N}$，$\prod\limits_{\varepsilon\in A_n} x_\varepsilon$ 可表示成为 $Q(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2)$，其中 Q 是整系数多项式. $n=1$ 时，$\prod\limits_{\varepsilon\in A_1} x_\varepsilon=(x_1)(-x_1)=Q(x_1^2)$.

所以结论成立. 现设 $n>1$，记 $\varepsilon'=(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_{k+1}, \cdots, \varepsilon_n)$，则

$$\prod_{\varepsilon\in A_n} x_\varepsilon=\prod_{\varepsilon'\in A_{n-1}}(x_{\varepsilon'}+x_k)(x_{\varepsilon'}-x_k)=\prod_{\varepsilon'\in A_{n-1}}(x_{\varepsilon'}^2-x_k^2).$$

将上述乘积中的括号展开，并合并同类项，便得到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的整系数多项式，且 x_k 的幂指数是偶数，由于下标 k 的任意性，所以类似的结论对每一个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都成立. 这就证明了

$$\prod_{\varepsilon\in A_n} x_\varepsilon=Q(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2).$$

并注意到 $|Q(1, 0, \cdots, 0)|=1$，所以多项式是非零的. 而在乘积 $\prod\limits_{\varepsilon\in A_n}(\varepsilon_1 x_1+\varepsilon_2 x_2+\cdots+\varepsilon_n x_n)$ 中有一个因式为 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，它对应了 $\varepsilon=(1, 1, \cdots, 1)$，把乘积中其他因式相乘得到 $x_1, \cdots, x_n$ 的整系数多项式 P. 于是 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)P(x_1, \cdots, x_n)=Q(x_1^2, \cdots, x_n^2)$，这就是所要的恒等式.